

Berechnung von Kernelementen in kooperativen Bestellmengen-Spielen

Julia Drechsel and Alf Kimms

Lehrstuhl für Logistik und Verkehrsbetriebslehre

Mercator School of Management · Universität Duisburg–Essen

Lotharstr. 65, LB 125 · 47048 Duisburg · Germany

{julia.drechsel,alf.kimms}@uni-due.de

Abstract: In diesem Beitrag betrachten wir den Fall einer horizontalen Kooperation im Bereich der Beschaffung. Jeder einzelne Besteller hat ein Problem der dynamischen Losgrößenplanung zu lösen. Bei Kooperation können Kosten eingespart werden und es bleibt zu klären, wie die anfallenden Bestellkosten unter den Akteuren aufzuteilen sind. Die kooperative Spieltheorie schlägt hier das Konzept des Kerns vor. Die Literatur beschäftigt sich bislang entweder mit vergleichsweise einfachen Problemen dieser Art bei denen eine Lösung für das Bestellmengenproblem analytisch hergeleitet und in einer geschlossenen Formel angegeben werden kann oder sie konzentriert sich auf eher theoretische Fragestellungen wie beispielsweise der Frage der Existenz eines Kernelements. Bislang unbekannt ist eine effiziente Methode mit der geklärt werden kann, ob der Kern nicht-leer ist, und mit der ggf. ein Element des Kerns berechnet werden kann, wenn das zugrundeliegende Problem ein komplexes Optimierungsproblem ist für das eine Lösung nicht per Formel angegeben werden kann. Ein solcher Algorithmus soll hier vorgestellt werden.

1 Ein Bestellmengenproblem

Ausgangspunkt unserer Betrachtung soll ein etabliertes Problem der Bestellmengenplanung sein: das sog. Wagner–Whitin Losgrößenproblem [WW58]. Für dieses Problem sind effiziente Lösungsverfahren bekannt, gleichwohl kann für dieses Problem keine optimale Lösung per geschlossener Formel angegeben werden. Das Problem kann wie folgt spezifiziert werden: Ein Besteller plant Bestellmengen für T Perioden. Der Bedarf d_t in den einzelnen Perioden ist bekannt. Um den Bedarf in einer Periode t zu decken, kann eine Bestellung in Periode t oder früher aufgegeben werden. Wird eine Bestellung zeitlich vor dem Bedarfstermin ausgelöst, so muss die bestellte Ware eingelagert werden. Dabei fallen Stückkosten in Höhe von h_t Geldeinheiten am Ende der Periode t an. Eine Bestellung in Periode t verursacht Fixkosten in Höhe von s_t Geldeinheiten. Ggf. fallen zusätzlich Stückkosten der Bestellung in Höhe von p_t Geldeinheiten an. Gesucht werden die Bestellmengen q_t in den Perioden. Es den Bestellmengen und den Bedarfen ergeben sich die Periodenendlagerbestände I_t (O.B.d.A. sei der bekannte Lagerbestand I_0 zu Beginn der ersten Periode null). Ein gemischt-ganzzahliges Modell konkretisiert dieses Problem mathematisch präzise (der Parameter M ist eine hinreichend große Zahl und die binäre Entscheidungsvariable x_t signalisiert, ob in einer Periode eine Bestellung ausgelöst wird

oder nicht):

$$\min \sum_{t=1}^T (s_t x_t + h_t I_t + p_t q_t) \quad (1)$$

u.d.N.

$$I_t = I_{t-1} + q_t - d_t \quad t = 1, \dots, T \quad (2)$$

$$q_t \leq M x_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3)$$

$$q_t, I_t \geq 0 \quad t = 1, \dots, T \quad (4)$$

$$x_t \in \{0, 1\} \quad t = 1, \dots, T \quad (5)$$

Beispiel: Man betrachte ein Beispiel mit $T = 4$ Perioden und Kostensätzen sowie Periodenbedarfen wie sie in Tabelle 1 gegeben sind. Eine optimale Lösung ist ebenfalls in Tabelle 1 zu sehen. Der Zielfunktionswert (Summe aller Kosten) dieser Lösung ist 918.

t	1	2	3	4	t	1	2	3	4
s_t	75	114	160	64	q_t	78	0	29	29
h_t	2	4	6	4	x_t	1	0	1	1
p_t	5	6	1	4	I_t	42	0	0	0
d_t	36	42	29	29					

Tabelle 1: Kostensätze, Bedarfsmengen und eine optimale Lösung des Beispiels

2 Ein kooperatives Bestellmengenspiel

Gibt es mehrere Besteller, so könnten diese Besteller bestellfixe Kosten einsparen, wenn sie ihre Bestellungen gemeinsam auslösen. Diese Variante der gemeinsamen Beschaffung wurde in der Literatur z.B. von Meca et al. [MGJB03, MTGJB04] auf Basis des Andlerschen Losgrößenmodells und von Hartmann et al. [HDS00] auf Basis des Newsvendor-Problems spieltheoretisch analysiert. In beiden Fällen sind die zugrundegelegten Probleme aber per Formel lösbar. Van den Heuvel et al. [vdHBH07] verwenden das oben beschriebene Wagner-Whitin Problem als Grundlage. Betrachtet man eine Menge N von Spielern, dann ist das zu lösende Bestellmengenproblem bei Kooperation dieser Spieler wie folgt spezifiziert:

$$c(N) = \min \sum_{t=1}^T (s_t x_t + h_t I_t + p_t q_t) \quad (6)$$

u.d.N. (3), (4), (5),

$$I_t = I_{t-1} + q_t - d_t(N) \quad t = 1, \dots, T \quad (7)$$

Dabei ist $d_t(N) = \sum_{i \in N} d_{it}$ mit d_{it} als Nachfrage des Spielers i in Periode t .

Beispiel: Für drei Spieler mit den Bedarfsmengen aus Tabelle 2 und ansonsten gleichen Parametern wie in Abschnitt 1 ergibt sich bei Kooperation aller drei Spieler die Lösung des Beispiels in Abschnitt 1.

t	1	2	3	4
d_{1t}	15	20	6	10
d_{2t}	1	5	15	9
d_{3t}	20	17	8	10

Tabelle 2: Bedarfsmengen für drei Spieler

Dieses Spiel ist subadditiv, d.h. für zwei beliebige, nicht-leere, disjunkte Koalitionen S_1 und S_2 aus N gilt: $c(S_1) + c(S_2) \geq c(S_1 \cup S_2)$. Es gibt also einen Anreiz für die Spieler in der großen Koalition N zu kooperieren. Für das Beispiel lässt sich die Eigenschaft der Subadditivität leicht nachrechnen. Die benötigten Daten sind in Tabelle 3 gegeben.

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$c(S)$	460	353	486	644	807	650	918

Tabelle 3: Zielfunktionswerte für mögliche Koalitionen

3 Berechnung eines Kernelements

Kooperiert die Spielermenge N , so müssen die Kosten auf die einzelnen Spieler umgelegt werden. Es seien π_i diejenigen Kosten, die Spieler i zugeordnet werden. Damit eine Kooperation stabil ist, muss die Zuteilung der Kosten auf die Spieler im Kern des Spiels liegen. Nur dann hat keine echte Teilmenge der Spielermenge N einen Anreiz die große Koalition zu verlassen. Formal ist der Kern wie folgt definiert:

$$C(c) = \{\pi \in \mathbf{R}^{|N|} \mid \sum_{i \in N} \pi_i = c(N) \text{ and } \sum_{i \in S} \pi_i \leq c(S) \text{ for all } S \subset N, S \neq \{\}\} \quad (8)$$

Der in [DK07] im Detail dokumentierte Algorithmus formuliert die Berechnung der π_i -Werte als lineares Programm, das mit Standardsoftware der linearen Optimierung gelöst werden kann. Das Problem dabei ist die exponentiell große Anzahl von Restriktionen der Art $\sum_{i \in S} \pi_i \leq c(S)$. Das Verfahren ist daher iterativ, wobei zu Beginn (fast) alle Restriktionen dieses Typs relaxiert sind und in jeder Iteration eine Restriktion hinzugefügt wird, sofern man eine verletzte Restriktion findet.

Beispiel: Angewendet auf das obige Beispiel mit drei Spielern lösen wir zunächst das folgende lineare Programm optimal:

$$\min v \quad (9)$$

u.d.N.

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 918 \quad (10)$$

$$\pi_1 - v \leq 460 \quad (11)$$

$$\pi_2 - v \leq 353 \quad (12)$$

$$\pi_3 - v \leq 486 \quad (13)$$

$$\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in \mathbf{R} \quad (14)$$

$$v \geq 0 \quad (15)$$

Man beachte, dass ein Wert $v > 0$ in der optimalen Lösung signalisiert, dass der Kern dieses Spiels leer ist. Als optimale Lösung ergibt sich in unserem Beispiel folgende Allokation der Kosten: $\pi = (460, 353, 274)$.

Sucht man nun nach einer Restriktion, die im Kern erfüllt sein muss, aber durch die gefundene Allokation verletzt ist (ein Problem, das sich als gemischt-ganzzahliges Modell formulieren und mit Standardsoftware der mathematischen Optimierung lösen lässt), so findet man hier die Koalition $\{1, 2\}$, die eine solche Restriktion definiert, denn $\pi_1 + \pi_2 = 813 > 644 = c(\{1, 2\})$.

In einer zweiten Iteration löst man daher das erweiterte Problem:

$$\min v \quad (16)$$

$$\text{u.d.N. } (10), (11), (12), (13), (14), (15),$$

$$\pi_1 + \pi_2 - v \leq 644 \quad (17)$$

Die optimale Lösung dieses linearen Programms liefert $\pi = (291, 353, 274)$. Diese Kostenallokation liegt im Kern, so dass das Verfahren terminiert. Rechenstudien belegen, dass dieses Vorgehen tatsächlich effizient ist. Selbst große Beispiele können auf diese Art und Weise gelöst werden.

Literatur

- [DK07] J. Drechsel und A. Kimms. Computing Core Cost Allocations for Cooperative Procurement. *Working Paper of University of Duisburg–Essen*, 2007.
- [HDS00] B. C. Hartman, M. Dror und M. Shaked. Cores of Inventory Centralization Games. *Games and Economic Behavior*, 31:26–49, 2000.
- [MGJB03] A. Meca, I. García-Jurado und P. Borm. Cooperation and competition in inventory games. *Mathematical Methods of Operations Research*, 57:481–493, 2003.
- [MTGJB04] A. Meca, J. Timmer, I. García-Jurado und P. Borm. Inventory games. *European Journal of Operational Research*, 156:127–139, 2004.
- [vdHBH07] W. van den Heuvel, P. Borm und H. Hamers. Economic Lot Sizing Games. *European Journal of Operational Research*, 176:1117–1130, 2007.
- [WW58] H. M. Wagner und T. M. Whitin. Dynamic Version of the Economic Lot Size Model. *Management Science*, 5:89–96, 1958.