Axiomatische Klassifikation von Informations-, Konzentrations- und relativen Ungleichheitsmaßen

Wolfgang Eichhorn
Institut für Wirtschaftstheorie und Operations Research
Manfred Krtscha
Institut für Mathematische Stochastik
Universität Karlsruhe
Kaiserstraße 12, D-76131 Karlsruhe

Abstract: Bei der Messung des Gewichts einer Information sprechen wir von *Informationsinhalt* oder *Entropie*. Wir sehen den Begriff in Zusammenhang mit den Begriffen *Konzentration* und *relative Ungleichheit*. Nachdem diese Fachausdrücke erläutert und hinsichtlich ihrer Messvorschriften definiert sind, wird die mathematische Struktur der für die Messvorschriften verwendeten Mess- oder Maßfunktionen, kurz: *Maße*, beschrieben. Gewisse für verschiedene Messzwecke grundlegend erforderliche Eigenschaften dieser Maße werden dann als Axiome gefordert. Anschließend könnten die aus der Literatur bekannten Maße daraufhin untersucht werden, ob und wie sie sich hinsichtlich unserer Axiomensysteme als Informations-, Konzentrations- oder relative Ungleichheitsmaße einordnen lassen.

1 Einleitung

Zur Messung von

(1) *Information* (Beispiele: Vergleich und Wert von Informationsstrukturen, Shannon-Entropie),

(2) *Konzentration* (Beispiel: Vergleich der Umsätze oder der Marktanteile der Unternehmen eines Marktes) und

(3) *Dispersion* (Beispiele: relative Ungleichheit der Einkommens- oder der Vermögensverteilung, relativer Unterschied von Objekten in den Naturwissenschaften, Streuung der Messergebnisse bei Experimenten)

existiert eine Fülle von Literatur. Die einschlägigen Arbeiten befassen sich mit Funktionen, deren Funktionswerte im jeweiligen Fall als Messwerte oder besser: numerische Ergebnisse von Messvorschriften interpretiert werden können. Deshalb wird häufig von *Mess-* oder *Maßfunktionen*, kürzer von *Maßen* gesprochen, das heißt, in den obigen Fällen von (a) *Informationsmaßen* (vgl. (1)), von (b) *Konzentrationsmaßen* (vgl. (2)) sowie von (c)

Dispersions-, Ungleichheits- oder *Streuungsmaßen* (vgl. (3)).

Es fällt auf ([Ner82, Ner88, Mos82, EV90, EK93]), dass alle diese Maße (Maßfunktionen) eine ganze Reihe gemeinsamer Eigenschaften besitzen. Diese Eigenschaften wollen wir im Folgenden (vgl. Abschnitt 2) in der Form von drei Axiomen **A.0**, **A.1** und **A.2** einführen. Dabei wählen wir diese Axiome so, dass sie von möglichst vielen der in der einschlägigen Literatur beschriebenen oder verwendeten Maßfunktionen (a), (b) und (c) erfüllt werden.

In Abschnitt 3 formulieren wir weitere Axiome, die wir als Erweiterungs- und Replikationsaxiome bezeichnen. Mit Hilfe dieser Axiome ist eine Klassifizierung der meisten Maße geleistet, die in der einschlägigen Literatur zur Messung von (1), (2) und (3) verwendet oder vorgeschlagen worden sind. Wir definieren: Ein Maß, das den Axiomen **A.1**, **A.2**, **A.3** und **A.4** genügt, ist ein *Dispersionsmaß*, das **A.1**, **A.2**, **A.3*** und **A.4*** genügt, ein *Konzentrationsmaß*, und das **A.1**, **A.2**, **A.3*** und **A.4**** genügt, ein *Informationsmaß*.

Damit sind die beiden Ziele der vorliegenden Arbeit erreicht: Das unübersichtliche Dickicht der meist ad-hoc in spezieller funktionaler Form vorgeschlagenen sogenannten Informations-, Konzentrations- oder Dispersionsmaße ist nun durch Klassifizierung klar geordnet, und jede der drei Klassen von Maßen hat nicht nur einen Namen, sondern auch eine Definition.

2 Die Axiome

In diesem Abschnitt betrachten wir so unterschiedliche Begriffe wie

- *Information* oder *Entropie* im Zusammenhang mit einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung,
- die verschiedenen *Umsätze* (oder *Marktanteile*) der auf einem Markt anbietenden Unternehmen,
- die *Streuung* von Messergebnissen bei Experimenten in den empirischen Wissenschaften,
- die verschiedenen relativen *Einkommen* (oder *Vermögen*) einer Gruppe von Einkommensbeziehern (oder Vermögensbesitzern).

Dabei ist bei jeder einzelnen unserer Betrachtungen das Ziel die Definition eines *Messverfahrens*, kurz: *Maßes* M, das einerseits eine Reihe nahe liegender Eigenschaften besitzt und das andererseits die Berechnung einer reellen Zahl ermöglicht. Diese reelle Zahl ist der durch M eindeutig bestimmte *Messwert*, der einen Eindruck davon vermittelt, wie groß bei den obigen Beispielen der Reihe nach

- die *Information* bzw. *Entropie* bei Vorliegen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n \quad (\mathbb{R}_+ \text{ die nichtnegativen reellen Zahlen})$$

mit $p_1 + \ldots + p_n = 1$ ist (das heißt, die $p_1, \ldots, p_n$ können als Wahrscheinlichkeiten für n mögliche Ausgänge eines Versuchs gedeutet werden),
- die relative *Ungleichheit* einer Verteilung

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \bar{\mathbb{R}}_+^n \quad (\bar{\mathbb{R}}_+^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \,|\, x_1 + \ldots + x_n > 0\})$$

der Einkommen oder Vermögen von Haushalten bzw. bestimmter Messergebnisse bei einem Experiment bzw. bestimmter Größen von Objekten,
- die *Konzentration* einer Verteilung der Umsätze

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \bar{\mathbb{R}}_+^n$$

oder Marktanteile (nicht Wahrscheinlicheiten!)

$$(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n, \; p_1 + \ldots + p_n = 1$$

ist.
Die im Folgenden zu untersuchenden Maße M_n sind also reellwertige Funktionen (*Maß* - oder *Messfunktionen*)

$$M_n : \bar{\mathbb{R}}_+^n \to \mathbb{R}, \; (x_1, \ldots, x_n) \mapsto M_n(x_1, \ldots, x_n)$$

bzw.

$$M_n : \bar{\bar{\mathbb{R}}}_+^n \to \mathbb{R} \text{ mit } \bar{\bar{\mathbb{R}}}_+^n := \{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n \,|\, p_1 + \ldots + p_n = 1\} \; .$$

Im ersten Fall verlangen wir von jedem Maß M, dass es die folgende Eigenschaft besitzt, die wir als *Axiom* **A.0** fordern:
A.0 (*Homogenität vom Grade* 0): Für alle $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \bar{\mathbb{R}}_+^n$ und für jedes reelle positive λ gilt

$$M_n(\lambda \boldsymbol{x}) = M_n(\boldsymbol{x}) \; .$$

Mit anderen Worten: Die Ungleichheit bzw. Konzentration einer Verteilung hängt nur von den *relativen* Größenverhältnissen ab. Würden wir diese Eigenschaft nicht fordern, so wäre es möglich, dass die Ungleichheit der Einkommens- bzw. Vermögensverteilung oder die Konzentration der Industrie einer Volkswirtschaft sich änderte, wenn die Einheit der Währung geändert würde.

Axiom **A.0** setzt uns in die Lage, weitere sinnvollerweise zu fordernde Eigenschaften unserer Messfunktionen M_n nur für den Definitionsbereich $\bar{\bar{\mathbb{R}}}_+^n$ formulieren zu müssen:

$$M_n = \bar{\bar{\mathbb{R}}}_+^n \to \mathbb{R}, \; (p_1, \ldots, p_n) =: \boldsymbol{p} \mapsto M_n(\boldsymbol{p}) = M_n(p_1, \ldots, p_n).$$

Man beachte, dass die $p_1, \ldots, p_n$ trotz der Definition von $\bar{\bar{\mathbb{R}}}_+^n$ nicht notwendigerweise als Wahrscheinlichkeiten zu deuten sind. Wir verlangen:

A.1 (*Symmetrie*): Für alle Permutationen π von $(1, \ldots, n)$ gilt

$$M_n(p_1, \ldots, p_n) = M_n(p_{\pi(1)}, \ldots, p_{\pi(n)}) \, .$$

Es ist sicher sinnvoll, das Messergebnis nicht davon abhängen zu lassen, an welcher Stelle des Vektors $\boldsymbol{p}$ eine für die Messung wichtige Größe steht.

A.2 (*Monotonie*): Für alle i, j mit $i \neq j$ und $p_i > p_j$ sowie für alle ϵ mit $0 < \epsilon \leq p_j$ gilt

$$M_n(p_1, \ldots, p_n) < M_n(p_1, \ldots, p_i + \epsilon, \ldots, p_j - \epsilon, \ldots, p_n) \, .$$

Mit anderen Worten: Das Maß/die Messfunktion M_n hat die Eigenschaft, stets dann einen höheren Wert auszuweisen, wenn zwei beliebige p_i, p_j mit $p_i > p_j$ wie beschrieben verändert werden. Für die Fälle der Messung der Ungleichheit der Einkommens- bzw. Vermögensverteilung oder der Größenverteilung von Objekten bzw. Experimentergebnissen oder der Konzentration einer Industrie in einer Volkswirtschaft ist **A.2** offensichtlich eine natürliche Forderung.

Wie steht es aber mit der Anwendung unseres Messkonzepts auf die Messung von Information bzw. Entropie?

Hier ist Folgendes zu beachten: Die Verteilung oder der Wahrscheinlichkeitsvektor

$$\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+ \, , \; p_1 + \ldots + p_n = 1 \, ,$$

stehe dafür, dass die n möglichen Ausgänge $A_1, \ldots, A_n$ eines Experiments mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_n$ eintreten. Wenn der Ausgang A_1 mit der Wahrscheinlichkeit $p_1 = 1$ eintritt (und somit die Ausgänge $A_2, \ldots, A_n$ die Wahrscheinlichkeiten $p_2 = \ldots = p_n = 0$ haben), hat die Information: „A_1 liegt vor“ das Informationsgewicht Null. Diese Information hat jedoch dann ein positives Informationsgewicht, wenn $p_1 < 1$ und damit nicht alle $p_2, \ldots, p_n$ gleich 0 sind. Offensichtlich hat diese Information wie auch die Information: „A_k liegt vor“ ($k \in \{1, 2, \ldots, n\}$) das höchste Informationsgewicht, wenn alle Wahrscheinlichkeiten gleich groß sind, wenn also $p_1 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$ ist.

Nach diesen Überlegungen liegt auf der Hand, dass ein Maß/eine Messfunktion

$$H_n : \bar{\bar{\mathbb{R}}}^n_+ \to \mathbb{R}, \; (p_1, \ldots, p_n) \mapsto H_n(p_1, \ldots, p_n) \, ,$$

die *das Informationsgewicht einer solchen Information* oder - wie man auch sagt - *die Entropie des Wahrscheinlichkeitsvektors* $\boldsymbol{p}$ als Funktionswert $H(\boldsymbol{p})$ ausweist, dem Axiom **A.1** (Symmetrie) und dem Axiom **A.2** (Monotonie), diesem allerdings bei Umkehrung des Vorzeichens, zu genügen hat:

$$H_n(p_1, \ldots, p_n) > H_n(p_1, \ldots, p_i + \epsilon, \ldots, p_j - \epsilon, \ldots, p_n) \, .$$

Es ist bemerkenswert, dass die mathematische Disziplin „Informationstheorie“ solchen Überlegungen ihren Ursprung verdankt; vgl. [Top74, AD75]. „Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, dass die Theorie nichts über die Bedeutung, den Inhalt oder den Wert einer

Mitteilung (einer 'Information') aussagt. Sie gibt nur Aufschluss über Zusammenhänge, die durch die statistische Struktur bestimmt sind.“ ([Top74], S.5).

Betrachten wir statt der Informations- oder Entropiemaße H_n die so genannten Neginformations- oder Negentropiemaße $M_n := -H_n$, so können wir definieren: *Die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Maße M_n genügen den Axiomen* **A.1** *und* **A.2**.

Bemerkungen:
1. Die durch

$$
\begin{aligned}
M_n(\boldsymbol{p}) &= p_1 \log\, p_1 + \ldots + p_n \log\, p_n \quad (p\ \log\ p = 0 \text{ für } p = 0), && (1)\\
M_n(\boldsymbol{p}) &= p_1^a + \ldots + p_n^a \quad (a > 1, 0^a := 0), && (2)\\
M_n(\boldsymbol{p}) &= p_1^{p_1} p_2^{p_2} \ldots p_n^{p_n} \quad (p^p := 1 \text{ für } p = 0), && (3)\\
M_n(\boldsymbol{p}) &= (p_1^a + \ldots + p_n^a)^{1/(a-1)}\ (a > 1, 0^a := 0), && (4)\\
M_n(\boldsymbol{p}) &= p_1 \log\, np_1 + \ldots + p_n \log\, np_n\ (p\ \log\ p = 0 \text{ für } p = 0), && (5)\\
M_n(\boldsymbol{p}) &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |p_i - p_j| && (6)
\end{aligned}
$$

gegebenen Maße M_n erfüllen die Axiome **A.1** und **A.2**. Diese sind also konsistent. Durch das Negative von (1) ist bis auf einen positiven Faktor das *Shannonsche Entropiemaß* H_n gegeben:

$$H_n(\boldsymbol{p}) = -p_1 \log_2\, p_1 - \ldots - p_n \log_2\, p_n\ .$$

Der *verallgemeinerte exponentielle Mittelwert* (4) geht gegen (3) für $a \to 1$. Der Logarithmus von (3) ist (1). Für $a = 2$ in (4) erhält man den *Herfindahl-Index*, das heißt in unserer Terminologie: das Herfindahl-Maß. Es wurde von Herfindahl zur Messung der industriellen Konzentration heran gezogen. Zur Messung der Ungleichheit werden meist der sogenannte *Gini-Koeffizient* (6) oder der *Theil-Index* (5) verwendet. Beide sind relative Ungleichheitsmaße.
2. Die Axiome **A.1** und **A.2** sind (logisch) *unabhängig*:

$$M_n^*(\boldsymbol{p}) = p_1^2 + \ldots + p_n^2 + \begin{cases} p_1^2\ , & \text{falls } p_1 > p_k (k = 2, \ldots, n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

genügt **A.2**, aber nicht **A.1**,

$$M_n^*(\boldsymbol{p}) = -p_1 \log p_1 - \ldots - p_n \log p_n$$

genügt **A.1**, aber nicht **A.2**.
3. Die Axiome **A.1** und **A.2** implizieren

$$M_n(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}) \leq M_n(\boldsymbol{p}) \leq M_n(1, 0, \ldots, 0) \text{ für alle } \boldsymbol{p} \in \bar{\bar{\mathbb{R}}}_+^n\ .$$

4. Ein Maß M_n erfüllt die Axiome **A.1** und **A.2** genau dann, wenn es strikt Schur-konvex ist; vgl. etwa [RS73] oder [FF78].

3 Die Klassifikation

Alle hier interessierenden Maße M_n genügen den Axiomen **A.1** und **A.2** (siehe auch **A.0**). Worin unterscheiden sich nun aber die (Neg-)Informations- oder (Neg-)Entropiemaße, die Dispersions- und die Konzentrationsmaße?

Als Antwort auf diese Frage schlagen wir aus nahe liegenden Gründen Folgendes vor:

Ein *Dispersionsmaß* M_n hat neben den Axiomen **A.1** und **A.2** den folgenden Axiomen **A.3** und **A.4** zu genügen:

A.3 (Erweiterung mit Null): Für alle $\boldsymbol{p} \in \bar{\bar{\mathbb{R}}}_+^n$ und n gilt

$$M_n(\boldsymbol{p}) < M_{n+1}(\boldsymbol{p}, 0) .$$

In Worten: Wenn zu einer Verteilung von n Einkommen oder Vermögen oder Objekt- oder Messgrößen als $(n+1)$te-Größe die Größe 0 hinzukommt, wird die Ungleichheit der Verteilung größer.

A.4 (Replikation):

$$M_{n \cdot k}(\frac{\boldsymbol{p}}{k}, \ldots, \frac{\boldsymbol{p}}{k}) = M_n(\boldsymbol{p}) \quad (\frac{\boldsymbol{p}}{k}, \ldots, \frac{\boldsymbol{p}}{k}\ ,\ k \text{ mal}) .$$

In Worten (am Beispiel der Vermögensverteilung): An der Ungleichheit der Aufteilung eines Vermögens ändert sich nichts, wenn jeder der n Eigner seinen Anteil gleichmäßig auf k Erben verteilt.

Ein *Konzentrationsmaß* M_n hat dagegen außer den Axiomen **A.1** und **A.2** die folgenden Axiome zu erfüllen:

A.3* (Erweiterung mit Null): Für alle $\boldsymbol{p} \in \bar{\bar{\mathbb{R}}}_+^n$ und n gilt

$$M_n(\boldsymbol{p}) = M_{n+1}(\boldsymbol{p}, 0) .$$

In Worten: Kommt zu n Unternehmen mit der Umsatz- oder Marktanteilsverteilung $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ ein $(n+1)$tes Unternehmen mit dem Umsatz oder Marktanteil 0 hinzu, so ändert sich die Industriekonzentration nicht.

A.4* (Replikation):

$$M_{n \cdot k}(\frac{\boldsymbol{p}}{k}, \ldots, \frac{\boldsymbol{p}}{k}) = \frac{1}{k} M_n(\boldsymbol{p}) \quad (\frac{\boldsymbol{p}}{k}, \ldots, \frac{\boldsymbol{p}}{k},\ k \text{ mal}) .$$

In Worten (gemünzt auf das obige Beispiel der Vermögensverteilung): Die Konzentration der obigen Verteilung des Vermögens auf k Erben ist ein k-tel der Konzentration der

Ausgangs-Vermögensverteilung.

Ein (Neg-)Entropie- oder (Neg-)Informationsmaß hat neben den Axiomen **A.1** und **A.2** den folgenden Axiomen zu genügen: **A.3***, denn der Informationsinhalt bleibt unverändert gleich, wenn man in der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \bar{\bar{\mathbb{R}}}_+^n$ die nicht realisierbaren Möglichkeiten weglässt.

A.4** (Replikation):
Wird ein Experiment mit dem Wahrscheinlichkeitsvektor $\boldsymbol{p} \in \bar{\bar{\mathbb{R}}}_+^n$ unter denselben Bedingungen, also unabhängig von dem Zwischenergebnis, einmal *wiederholt*, so ist der gesamte Informationsinhalt dieser 2 Experimente 2-mal so groß wie der jedes einzelnen Experiments.

Für den Spezialfall der Gleichverteilung bedeutet diese Forderung im Unterschied zu den zuvor betrachteten „Replikationen" **nicht** die vielleicht formal erwartete Forderung

$$H_{n\cdot 2}(\frac{1}{n\cdot 2}, \frac{1}{n\cdot 2}, \ldots, \frac{1}{n\cdot 2}) = 2H_n(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}) ,$$

sondern die sich aus den Wahrscheinlichkeiten eines Doppelversuchs ergebende Forderung

$$H_{n^2}(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}) = 2H_n(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}) .$$

Fordert man nun *zusätzlich*, dass der Informationsinhalt einer Gleichverteilung $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ für alle n durch ein und dieselbe Funktion H mit

$$H(n) := H_n(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$$

berechnet wird, so erhält man aus der letzten Gleichung die Funktionalgleichung

$$H(n^2) = 2H(n),\ n \in \mathbb{N} . \qquad (**)$$

Diese Funktionalgleichung wird durch jede Logarithmusfunktion erfüllt. Es fällt auf, dass alle Informationsmaße, die diese Funktionalgleichung (**) erfüllen, als spezielle *Entropien* bezeichnet werden wie z.B. „Shannon-*Entropie*", „wirkliche *Entropie*", „ideelle *Entropie*" (vgl. [Top74], S. 10–11). Daher können wir alle Entropien durch die zusätzliche Forderung (**) als spezielle Unterklasse der Informationsmaße definieren. Im Vergleich zu den anderen hier beschriebenen Klassen von Maßfunktionen ist die Klasse der nun definierten *Entropiefunktionen* sehr klein; denn aus der Funktionalgleichung (**) folgt für $k \in \{1, 2, 4, 8, \ldots\}$ die Gleichung

$$H(2^k) = k \cdot H(2) \text{ bzw. } H(m) = \log_2 m \cdot H(2) \text{ für } m = 2^k ,$$

so dass die Entropie der Gleichverteilung $(\frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m})$ allein durch den Wert $H(2)$ festgelegt ist.

Daher ist es möglich, mit wenigen Forderungen die genannten speziellen Entropien zu charakterisieren. Da dies jedoch bereits in den zitierten Büchern von Topsøe [Top74] sowie Aczél und Daróczy [AD75] auf mehrere Arten durchgeführt wurde, haben wir uns ein anderes Ziel gesetzt. Mit der Definition der Informationsmaße, Konzentrationsmaße, Dispersionsmaße durch jeweils vier Axiome und der Entropiemaße durch eine weitere naheliegende, zu einer Funktionalgleichung führenden Forderung erreichten wir letztlich dieses Ziel, auch wenn dabei einige bekannte Maße nicht erfasst wurden. (Die Entropie $H_n(\boldsymbol{p}) = \log_2 n$, die Hartley [Har28] eingeführt hatte, wird z.B. nicht erfasst, da sie zu „grob" ist und unser „sensitives" Axiom **A.2** verletzt. Da $H_n(\boldsymbol{p}) = \log_2 n$ nur von n, also nicht von $p_1, \ldots, p_n$ abhängt, ist es in *diesem* Kontext sinnlos, **A.3*** zu fordern.)

Literatur

[AD75] Aczél, J.; Daróczy, Z.: On measures of information and their characterizations. Academic Press, New York, 1975.

[EK93] Eichhorn, W; Krtscha, M.: Informationsmessung und Beziehungen zur Messung von Streuung, Risiko, Entropie, Konzentration und Ungleichheit. In: W. Frisch, A. Taudes (Hrsg.): Informationswirtschaft. Physica-Verlag, Heidelberg, 1993.

[EV90] Eichhorn, W; Vogt, A.: Gemeinsames bei der Messung von Ungleichheit, Streuung, Risiko und Information. Mitteilungen der Schweiz. Vereinigung der Versicherungsmathematiker, Heft 1, 1990.

[FF78] Fields, G.S.; Fei, J.C.H.: On inequality comparisons. Econometrica 46, 1978, S. 303-316.

[Har28] Hartley, R.V.: Transmission of Information. Bell System Tech. J. 7, 1928, S. 535-563.

[Mos82] Mosler, K.C.: Entscheidungsregeln bei Risiko: multivariate stochastische Dominanz. Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[Ner82] Nermuth, M.: Information structures in economics. Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[Ner88] Nermuth, M.: Verschiedene ökonomische Theorien mit gleicher formaler Struktur: Risikostreuung, Einkommensungleichheit, Informationsstrukturen usw. Vortragsunterlagen, 1988.

[RS73] Rothschild, M.; Stiglitz, E.: Some further results on the measurement of inequality. J. Econ. Theory 6, 1973, S. 188-204.

[Top74] Topsøe, F.: Informationstheorie. Teubner, Stuttgart, 1974.