

Klassifikation simplizialer Arrangements mit dem Computer

Michael Cuntz
(TU Kaiserslautern)

cuntz@mathematik.uni-kl.de



Simpliziale Arrangements sind geometrische Objekte, die elementar definiert werden können und dennoch in tiefen Gebieten der Mathematik eine wichtige Rolle spielen. Ursprünglich wurden sie 1941 von Melchior [13] eingeführt aber daraufhin jahrzehntelang wenig beachtet. Erst 1971 stellte Grünbaum [8] eine Sammlung aller bekannten simplizialen Arrangements in der reellen projektiven Ebene zusammen. Er schrieb, dass sie eine sehr natürliche Struktur seien und in der Lösung vieler Probleme über Arrangements auftauchen. Tatsächlich waren kurze Zeit später (1972) simpliziale Arrangements der zentrale Gegenstand in Delignes [7] Lösung der Vermutung von Brieskorn, dass das Komplement der Vereinigung aller Spiegelungshyperebenen einer Spiegelungsgruppe im (komplexifizierten) Raum die $K(\pi, 1)$ -Eigenschaft besitzt.

Seither wurden ab und zu neue Arrangements entdeckt (auch in höheren Dimensionen); 2008 fasste Grünbaum [10] seine Sammlung der simplizialen Arrangements in der projektiven Ebene zu einem neuen, leichter zugänglichen Katalog zusammen. Nur wenig früher entstand eine neue Symmetriestruktur: Das *Weyl-Gruppoid* wurde als Invariante von gewissen Hopf-Algebren, sogenannten Nichols-Algebren, entdeckt. Nachdem das Weyl-Gruppoid axiomatisch und von Nichols-Algebren losgelöst von Heckenberger und Yamane beschrieben wurde, folgte eine Serie von Arbeiten, die schließlich zur Klassifikation der *endlichen* Weyl-Gruppoiden führte [4]. Erst im Nachhinein stellte sich heraus [12], [2], dass diese einer großen Klasse von simplizialen Arrangements entsprechen, die wir *kristallographisch* nennen.

Die Klassifikation der kristallographischen Arrangements besteht aus mehreren Teilen. Zunächst müssen wichtige Sätze über Weyl-Gruppoiden bewiesen werden. In den Dimensionen drei bis acht gibt es dann allerdings 74 exzeptionelle kristallographische Arrangements, für die bisher keine generische Konstruktion bekannt ist. Diese zu finden und zu zeigen, dass es keine weiteren gibt, ist Aufgabe des Computers: Es muss ein riesiger Suchbaum durchlaufen werden. Nur durch mehrere entscheidende Abbruchkriterien hat dieser Baum endlich viele Blätter und kann dann in wenigen Tagen durchforstet werden. Eine Klassifikation von simplizialen Arrangements im Allgemeinen wird eine noch größere Anzahl von Ausnahmen behandeln müssen und ist daher

möglicherweise ohne Computer nahezu ausgeschlossen.

In diesem Artikel erklären wir zunächst die theoretischen Grundlagen und erläutern dann die aktuellen Klassifikationsansätze mit dem Computer.

Arrangements von Hyperebenen

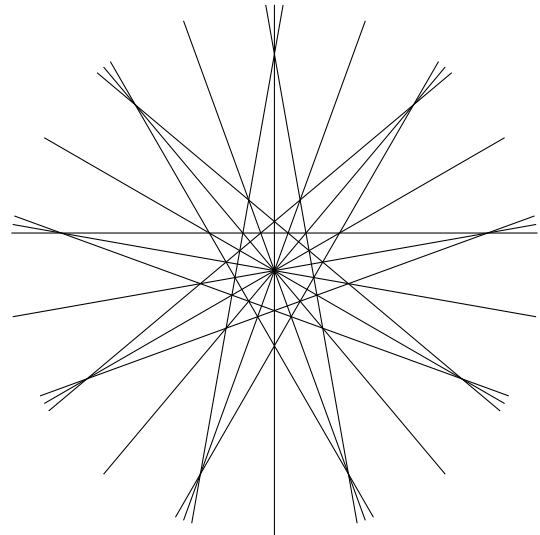


Abbildung 1: Ein simpliziales Arrangement.

Ein *Arrangement von Hyperebenen* in V ist eine endliche Menge $\mathcal{A}$ von Hyperebenen in einem endlich-dimensionalen Vektorraum V . Wir wollen uns hier auf den Fall beschränken, dass V ein reeller Vektorraum ist, also $V = \mathbb{R}^r$ für ein $r \in \mathbb{N}$, und wir nehmen an, dass alle Hyperebenen in $\mathcal{A}$ linear sind, also den Nullpunkt enthalten. Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^r \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ heißen *Kammern* von $\mathcal{A}$. Das Arrangement $\mathcal{A}$ heißt ein *simpliziales Arrangement*, falls alle Kammern offene simpliziale Kegel sind, d.h., für jede Kammer K gibt es $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^r$ mit

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^r a_i v_i \mid a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}_{>0} \right\}.$$

Ist etwa $r = 3$, so kann man ein Arrangement $\mathcal{A}$ leicht zweidimensional zeichnen: Man wähle eine affine Hyperebene H , die nicht durch Null geht, und bilde den Schnitt aller Hyperebenen von $\mathcal{A}$ mit H . Damit wird $\mathcal{A}$ als eine Ansammlung von Geraden in der (projektiven) Ebene dargestellt. Genau dann, wenn $\mathcal{A}$ simplizial ist,

bilden diese Geraden eine Triangulierung der projektiven Ebene (also der Sphäre), siehe z. B. Abb. 1. Die Dreiecke entsprechen den Kammern des Arrangements.

Kristallographische Arrangements

Die Klasse von Arrangements, die bei der Untersuchung der Weyl-Gruppoiden entdeckt wurde, sind die sogenannten *kristallographischen Arrangements*: Es sei $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$ ein simpliziales Arrangement in $V = \mathbb{R}^r$. Wir wählen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V^*$ derart, dass $H_i = \ker \alpha_i$, für $i = 1, \dots, n$. Es sei $R := \{\pm\alpha_1, \dots, \pm\alpha_n\}$. Nun kann man sich überlegen, dass es wegen der Simplizialität von $\mathcal{A}$ zu jeder Kammer K von $\mathcal{A}$ eine eindeutige Basis $B^K = \{\beta_1, \dots, \beta_r\} \subseteq R$ von V^* gibt, derart dass die zu B^K duale Basis den Kegel K aufspannt (siehe Abbildung 2).

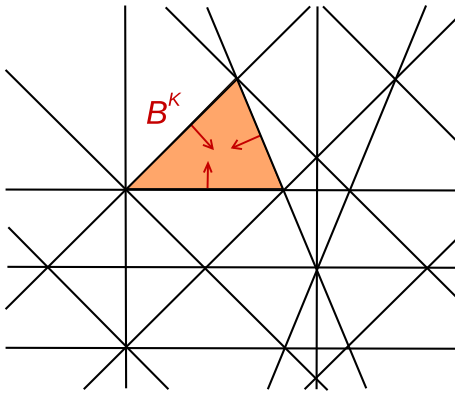


Abbildung 2: Eine Kammer K mit ihrer Basis B^K .

Wir nennen $(\mathcal{A}, R)$ ein kristallographisches Arrangement, wenn für alle Kammern K von $\mathcal{A}$ gilt:

$$R \subseteq \sum_{\alpha \in B^K} \mathbb{Z}\alpha.$$

Äquivalent hierzu ist, dass alle Koordinaten von Erzeugern von Kammern (bis auf lineare Isomorphismen) im Gitter $\mathbb{Z}^r$ gewählt werden können, und daraufhin die Basiswechselabbildungen zwischen den zugehörigen Basen ganzzahlig sind.

Kristallographische Arrangements bilden eine große Teilklasse der simplizialen Arrangements. Zum Beispiel gibt es im Fall $r = 3$ bisher 118 bekannte simpliziale Arrangements mit weniger als 38 Hyperebenen; 55 davon sind kristallographisch.

Das Weyl-Gruppoid

Der Schlüssel zur Klassifikation der kristallographischen Arrangements sind die zugehörigen Weyl-Gruppoiden. Haben wir zwei benachbarte Kammern K und K' eines Arrangements $\mathcal{A}$ mit den entsprechenden Basen B^K und $B^{K'}$, so stellt sich heraus, dass es eine eindeutige lineare Abbildung $\sigma : V^* \rightarrow V^*$ gibt, die B^K auf $B^{K'}$ abbildet und als Matrix bezüglich der Basis B^K keine Nullen auf der Diagonalen hat. Das Weyl-Gruppoid von $\mathcal{A}$ ist die Kategorie, die die Kammern von

$\mathcal{A}$ als Objekte und Verknüpfungen von Abbildungen σ wie eben als Morphismen hat (siehe z. B. Abb. 3).

Ist $\mathcal{A}$ die Menge der Spiegelungshyperebenen einer Weyl-Gruppe W (also einer kristallographischen Spiegelungsgruppe), so ist $\mathcal{A}$ ein kristallographisches Arrangement, und das zugehörige Weyl-Gruppoid ist W . Die obige Menge R spielt für das Weyl-Gruppoid dieselbe Rolle wie das Wurzelsystem von W für die Weyl-Gruppe.

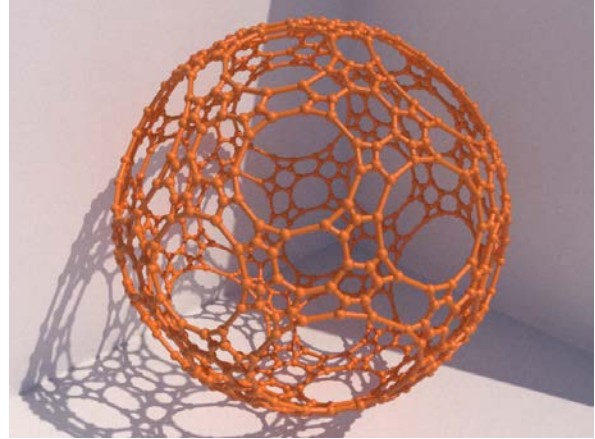


Abbildung 3: Das „größte“ Weyl-Gruppoid in Dimension drei: Die Knoten entsprechen den Kammern und die Kanten entsprechen den Spiegelungen σ .

Die Klassifikation der kristallographischen Arrangements

Die Klassifikation der kristallographischen Arrangements teilt sich (im wesentlichen) in drei Fälle auf: Dimension zwei, Dimension drei bis acht und Dimension größer als acht.

In Dimension zwei gibt es unendlich viele kristallographische Arrangements. Sie werden parametrisiert durch Triangulierungen von konvexen n -Ecken durch Diagonalen, die sich nicht überschneiden (siehe [5]).

In Dimension $r > 2$ ist die Situation ganz anders. Sind $(\mathcal{A}, R)$ ein kristallographisches Arrangement und B^K die ausgezeichnete Basis von V^* zu einer Kammer K , so folgt aus der Simplizialität von $\mathcal{A}$, dass die Koordinaten eines $\alpha \in R$ bezüglich B^K alle nicht-negativ oder nicht-positiv sind, d.h., wir können R (bezüglich der Kammer K) schreiben als $R = R_+ \cup -R_+$ mit

$$R_+ = R \cap \sum_{\alpha \in B^K} \mathbb{N}_0 \alpha.$$

Der folgende Satz wird mithilfe des Weyl-Gruppoids bewiesen:

Satz ([6, Thm. 2.10]) Ist $\alpha \in R_+$, so ist entweder $\alpha \in B^K$, oder es gibt $\beta, \gamma \in R_+$ mit $\alpha = \beta + \gamma$.

Dieser Satz liefert sofort einen Algorithmus zur Enumeration von kristallographischen Arrangements: Man beginne mit einer Basis von V^* und füge sukzessive Summen von zwei Elementen hinzu, bis man eine Menge R_+ konstruiert hat, die ein kristallographisches

Arrangement definiert. Hierbei sind natürlich nicht beliebige Summen erlaubt: Es gelten mehrere sehr starke Einschränkungen, etwa muss jedes neue Element zu allen relevanten „kristallographischen Unterarrangements“ kleinerer Dimension „kompatibel“ sein. Ein weiteres wichtiges Ergebnis ist eine Schranke für die Größe der Einträge der Morphismen in endlichen Weyl-Gruppoiden in Dimension drei.

Eine stark optimierte Implementierung dieses Algorithmus liefert in der Tat ein erstaunliches Ergebnis: In den Dimensionen $2 < r < 9$ gibt es nur endlich viele kristallographische Arrangements. Nutzt man die Tatsache, dass in Dimension acht alle kristallographischen Arrangements von Spiegelungsgruppen und einer weiteren einfach zu beschreibenden Serie herkommen, kann man durch Untersuchung der möglichen Dynkin-Diagramme zeigen, dass dem auch in höheren Dimensionen so ist. Wir erhalten den Satz:

Satz (Cuntz, Heckenberger, 2009/2010) Es gibt genau drei Familien von kristallographischen Arrangements:

- (a) Eine Familie in Dimension 2, die durch Triangulierungen eines n -Ecks durch Diagonalen, die sich nicht überschneiden, parametrisiert wird,
- (b) zu jeder Dimension $r > 2$ die klassischen Spiegelungsarrangements vom Typ A_r , B_r , C_r und D_r , und eine Serie von $r - 1$ weiteren Arrangements,
- (c) eine Familie von 74 „sporadischen“ Arrangements in Dimension $2 < r < 9$ (unter anderem diejenigen zu den Weyl-Gruppen vom Typ F_4 , E_6 , E_7 und E_8).

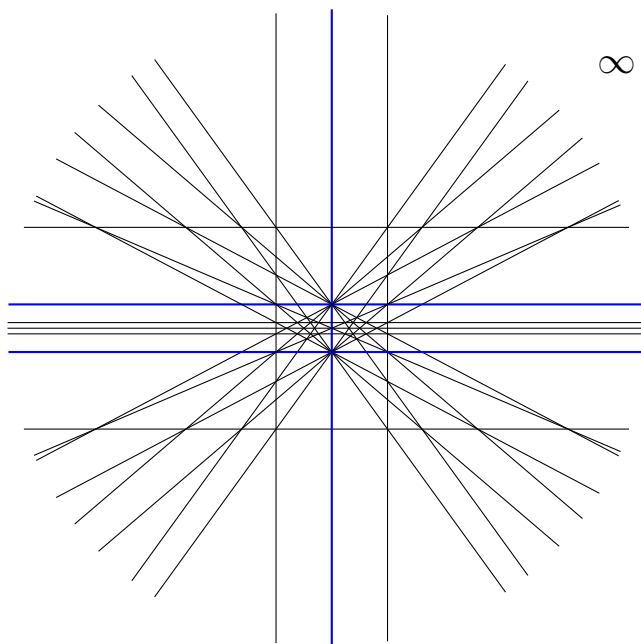


Abbildung 4: Ein neues simpliziales Arrangement mit 25 Geraden. Entfernt man die blauen Geraden, so erhält man weitere neue simpliziale Arrangements mit 22, 23 und 24 Geraden.

Implementierung

Der Algorithmus zur Aufzählung der kristallographischen Arrangements basiert hauptsächlich auf exakter linearer Algebra über $\mathbb{Q}^r$. Es ist also naheliegend diesen in einem CAS zu implementieren. Allerdings verbraucht ein solches System an diversen Stellen zu viel Zeit (etwa durch Interpretierung oder durch die Langzahlarithmetik, welche hier unnötig ist, da die Zahlen alle sehr klein bleiben). Ich schätze, dass ein CAS für die obige Klassifikation etwa ein Jahr bräuchte. Die bessere Methode scheint es hier zu sein, einen Prototyp im CAS zu implementieren (etwa in MAGMA oder in GAP), und aus diesem Prototyp ein C++-Programm zu erstellen.

Es ist sehr schwierig, Aussagen über die Laufzeit des Algorithmus zu treffen. In jeder festen Dimension $r > 2$ ist die Laufzeit endlich, aber in Abhängigkeit von r ist sie vermutlich exponentiell. Da wir für die Klassifikation aus theoretischen Gründen aber nur bis $r = 8$ rechnen müssen, spielt das letztendlich keine Rolle.

Simpliziale Arrangements

Die Klassifikation der simplizialen Arrangements im Allgemeinen ist noch ein offenes Problem; auch eine effiziente Methode zur Enumeration ist noch nicht bekannt. Ein erster Ansatz, simpliziale Arrangements in der reellen projektiven Ebene aufzuzählen, der aber noch nicht weit genug reicht, besteht darin, die allgemeineren Arrangements von Pseudogeraden zu betrachten. Ein *Arrangement von Pseudogeraden* ist eine Familie von einfachen geschlossenen Kurven in der reellen projektiven Ebene (oder auf der 2-Sphäre) derart, dass je zwei Kurven genau einen Punkt gemeinsam haben (auf der Sphäre zwei), siehe z. B. Abb. 5.

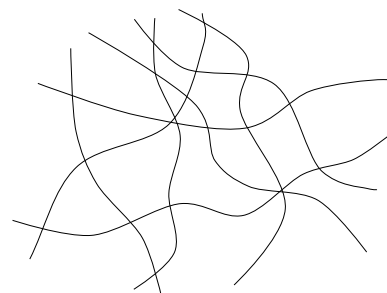


Abbildung 5: Ein Ausschnitt aus einem Arrangement von Pseudogeraden.

Ein Arrangement von Pseudogeraden heißt *dehnbar*, falls es ein Arrangement von Geraden mit derselben Inzidenz, also demselben Schnittverhalten gibt. Dass es Arrangements von Pseudogeraden gibt, die nicht dehnbar sind, zeigt der Satz von Pappus (siehe Abb. 6, vergleiche [9, Thm. 3.1]):

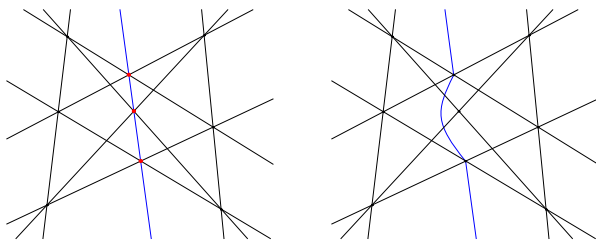


Abbildung 6: Satz von Pappus.

Mit den im linken Bild vorgegebenen schwarzen Geraden (und dieser Inzidenz), liegen drei der Schnittpunkte auf einer Geraden (der blauen Geraden). Legt man nun (rechts) eine blaue Pseudogerade so, dass sie nur zwei dieser Punkte trifft, so ist das Arrangement nicht mehr dehnbar.

Verzerrt man ein Arrangement von Pseudogeraden ein wenig, so kann man erreichen, dass es zu einem „Wiring“-Diagramm wird (siehe Abb. 7). Wir lassen eine formale Definition aus, weil sie etwas technisch ist; merken sollten wir uns lediglich, dass jede Gerade auf dem Weg von links nach rechts jede andere Gerade genau einmal passiert haben muss.

Satz (Goodman, Pollack) Jedes Arrangement von Pseudogeraden ist isomorph zu einem Wiring-Diagramm.

Dadurch wird das Arrangement mittels der Kombinatorik der Überkreuzungen kodiert. Diese Kombinatorik lässt sich wiederum leicht aufzählen, allerdings erhält man damit auch alle nicht dehnbaren Arrangements und verschlechtert somit die Laufzeit der Enumeration erheblich.

Simplizialität ist auch bei Arrangements von Pseudogeraden eine starke Einschränkung. Eine Enumeration von simplizialen Wiring-Diagrammen liefert eine vollständige Liste aller simplizialen Arrangements in der reellen projektiven Ebene mit bis zu 27 Geraden (siehe [3]).

Dabei finden sich tatsächlich vier neue Arrangements (siehe Abb. 4), die im eingangs erwähnten Katalog von Grünbaum fehlen. Außerdem erhalten wir einen Beweis für die folgende Vermutung:

Vermutung ([9, Conj. 1], [1, 6.3] oder [11, 3.1]) Alle simplizialen Arrangements mit höchstens 14 Pseudogeraden sind dehnbar.

Es gibt sehr viele simpliziale Arrangements mit mehr als 14 Pseudogeraden, die nicht dehnbar sind. Meistens verletzen diese Arrangements den Satz von Pappus, aber in ganz seltenen Fällen muss man mithilfe eines Gleichungssystems und Gröbnerbasen beweisen, dass sie tatsächlich nicht dehnbar sind.

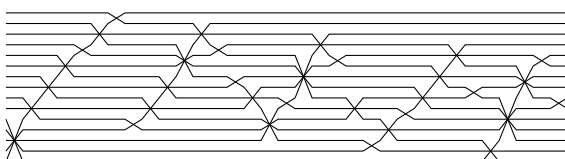


Abbildung 7: Ein nicht dehnbare Wiring-Diagramm mit 15 Pseudogeraden.

Ausblick

Die Klassifikation der simplizialen Arrangements scheint durch Unterstützung des Computers mittlerweile in Reichweite zu sein. Denkbar wären zur Lösung etwa Verallgemeinerungen der Sätze, die im Fall der kristallographischen Arrangements entscheidend waren. Die Entdeckung des Weyl-Gruppoids wirft auch noch viele weitere Fragen auf, allen voran, welche weiteren Ergebnisse über Spiegelungsgruppen in diese neue Richtung übertragen werden können. Außerdem haben sich jetzt schon einige Verbindungen zu anderen Gebieten herausgestellt, z. B. zu Cluster-Algebren und zu torischen Varietäten.

Literatur

- [1] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, und G.M. Ziegler, *Oriented matroids*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 46, Cambridge University Press, 1993.
- [2] M. Cuntz, *Crystallographic arrangements: Weyl groupoids and simplicial arrangements*, Bull. London Math. Soc. **43** (2011), no. 4, 734–744.
- [3] ———, *Simplicial arrangements with up to 27 lines*, arXiv:1108.3000v1 (2011), 18 S.
- [4] M. Cuntz und I. Heckenberger, *Finite Weyl groupoids*, arXiv:1008.5291v1 (2010), 35 S.
- [5] ———, *Reflection groupoids of rank two and cluster algebras of type A*, J. Combin. Theory Ser. A **118** (2011), no. 4, 1350–1363.
- [6] ———, *Finite Weyl groupoids of rank three*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 1369–1393.
- [7] Pierre Deligne, *Les immeubles des groupes de tresses généralisés*, Invent. Math. **17** (1972), 273–302.
- [8] B. Grünbaum, *Arrangements of hyperplanes*, Proc. of the Second Louisiana Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Louisiana State Univ., Baton Rouge, La., 1971), S. 41–106.
- [9] ———, *Arrangements and spreads*, AMS Providence, R.I., 1972, CBMS Regional Conf. Series in Math., No. 10.
- [10] ———, *A catalogue of simplicial arrangements in the real projective plane*, Ars Math. Contemp. **2** (2009), no. 1, 25 S.
- [11] ———, *Small unstretchable simplicial arrangements of pseudolines*, Geombinatorics **18** (2009), 153–160.
- [12] I. Heckenberger und V. Welker, *Geometric combinatorics of Weyl groupoids*, J. Algebr. Comb. **34** (2010), no. 1, 115–139.
- [13] E. Melchior, *Über Vielseite der projektiven Ebene*, Deutsche Math. **5** (1941), 461–475.