

Approximationsalgorithmen für Spektrumsallokation und Power Control in Funknetzwerken*

Thomas Kesselheim

Department of Computer Science
Cornell University
kesselheim@cs.cornell.edu

Abstract: In einem Funknetzwerk können gleichzeitige Transmissionen aufgrund von Interferenzeffekten kollidieren. Um trotzdem eine zuverlässige Funktionsweise garantieren zu können, sind Algorithmen erforderlich, die die Zugriffe auf das Funkspektrum verwalten. In dieser Arbeit entwerfen und analysieren wir derartige Algorithmen aus der Perspektive der Theoretischen Informatik. Da sich die behandelten Probleme unter den üblichen Annahmen der Komplexitätstheorie nicht effizient exakt lösen lassen, betrachten wir Approximationsalgorithmen. Hierbei verfolgen wir das Ziel, beweisbare Garantien über die Qualität der berechneten Lösung herzuleiten. Im Gegensatz zu den meisten früheren Arbeiten in der Algorithmik modellieren wir die Interferenzbedingungen mit Hilfe des Signal-zu-Interferenz-plus-Rausch-Verhältnisses (signal-to-interference-plus-noise ratio, SINR). Auf diese Weise erlaubt uns das Interferenzmodell, variable Sendeleistungen zu berücksichtigen.

1 Einleitung

Funknetzwerke spielen eine enorme Rolle in unserer heutigen Gesellschaft. Beispielsweise ist drahtloser Internetzugang mittels Mobilfunknetzen und WLANs heutzutage allgegenwärtig. Eine weitere, vielversprechende Anwendung sind Sensornetze. Diese bestehen aus kleinen Geräten, die sich selbstständig koordinieren, um Messungen in der Industrie oder der Umwelt vorzunehmen.

Eine wichtige Gemeinsamkeit all dieser Funknetzwerke besteht darin, dass gleichzeitige Transmissionen aufgrund von Interferenzeffekten kollidieren können. Beim Bau von Sensornetzen muss der Umgang mit Interferenz selbstverständlich berücksichtigt werden. In Netzen mit fester Infrastruktur hingegen konnte in der Vergangenheit Interferenz bereits bei der Konzeption der Netze grundsätzlich ausgeschlossen werden, indem für unterschiedliche Dienste bzw. Funkzellen verschiedene Frequenzen verwendet wurden. Dieser Ansatz ist aber leider an seine Grenzen gestoßen: Durch den sehr großzügigen Umgang mit Spektrum sind Frequenzen ein knappes Gut geworden, das es mit Bedacht zu verwal-

* Englischer Titel der Dissertation: "Approximation Algorithms for Spectrum Allocation and Power Control in Wireless Networks" [Kes10]. Diese Arbeit wurde unterstützt durch das UMIC Research Centre, RWTH Aachen University.

ten gilt.

Zum Betrieb jeglicher Funknetzwerke werden daher intelligente Algorithmen benötigt, die Spektrumszugriffe kontrollieren und koordinieren. Bei deren Entwicklung legen praktisch motivierte Arbeiten ihren Schwerpunkt häufig auf gewisse technologische oder regulatorische Aspekte. Sie evaluieren ihre Ergebnisse anschließend in Simulationen oder Experimenten. Dieser Ansatz hat jedoch den Nachteil, dass er im Wesentlichen heuristisch arbeitet: Allgemeine Eigenschaften können auf diese Weise nur schwer nachgewiesen werden.

Im Gegensatz hierzu liefert die theoretische Analyse von Algorithmen beweisbare Garantien. Bedauerlicherweise greifen jedoch die meisten Arbeiten, die Algorithmen in drahtlosen Netzwerken analysieren, auf unrealistische Annahmen zurück. Üblicherweise werden die Interferenzbedingungen durch einen Graphen modelliert, dessen Kanten angeben, ob eine Transmission mit einer anderen kollidieren würde. Dies ist jedoch in mehrerer Hinsicht zweifelhaft, weil physikalische Bedingungen nur ungenügend abgebildet werden: Um eine Transmission erfolgreich zu übermitteln, darf die Gesamtheit der Interferenz nicht zu groß sein. Ein solches Modell hingegen betrachtet Interferenzen einzelner Sender lediglich separat. Darüber hinaus ist es auf diese Weise auch nicht möglich, verschiedene Sendeleistungen zu modellieren.

In dieser Arbeit versuchen wir, die beiden genannten Ansätze anzunähern und wünschenswerte Eigenschaften zu kombinieren. Wir nutzen hierzu etablierte Modelle aus der Elektrotechnik, um die Interferenzbedingungen zu modellieren. Diese erlauben uns, die genannten Effekte durch Aggregation von Interferenz und unterschiedliche Sendeleistungen zu berücksichtigen. Die behandelten Algorithmen analysieren wir formal und beweisen Garantien über die Güte ihrer Lösungen. Aus diesem Grund sind unsere Untersuchungen von sehr grundsätzlicher Natur. Wir abstrahieren von den verschiedenen Anwendungsgebieten und Technologien und konzentrieren uns auf die gemeinsamen zugrunde liegenden kombinatorischen Optimierungsprobleme.

1.1 Interferenzmodell

Wir benutzen ein Standardmodell aus der Elektrotechnik (siehe z. B. [Rap01]), das erstmalig von Moscibroda und Wattenhofer [MW06] in einer Fragestellung der Algorithmik betrachtet wurde. Es basiert auf dem Signal-zu-Interferenz-plus-Rausch-Verhältnis (signal-to-interference-plus-noise ratio, SINR). Bei der SINR handelt es sich um das übliche Maß, um die Qualität eines empfangenen Signals zu quantifizieren. Sie ist definiert als das Verhältnis zwischen Stärke des gewünschten Signals und der Summe aller anderen Signalstärken plus Rauschen. Je größer dieses Verhältnis ist, desto besser können verschiedene Symbole in einer Transmission unterschieden werden und desto besser ist folglich die Signalqualität.

Für eine formale Definition müssen wir zunächst die Signalausbreitung modellieren. Für die Abnahme der Signalstärke bei der Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle sind verschiedene Effekte verantwortlich. Diese werden typischerweise in einem einfachen Pfadverlust-Modell zusammengefasst. Wir nehmen an, dass sich die Knoten des Funknetz-

werkes in einem metrischen Raum (V, d) befinden. Wenn ein Knoten s mit Leistung p sendet, empfängt ein Knoten r in Entfernung $d(s, r)$ dieses Signal mit einer Stärke proportional zu $p/d(s, r)^\alpha$. Die Konstante α wird als Pfadverlust-Exponent (*path-loss exponent*) bezeichnet. Häufig wird angenommen, dass dieser einen Wert zwischen 2 und 6 annimmt; Werte kleiner als 2 können jedoch auch auftreten. Für die meisten unserer Ergebnisse reicht die Annahme $\alpha > 0$ aus.

Gegeben sei nun eine Menge $\mathcal{L} \subseteq V \times V$ von Paaren von Sendern und Empfängern (*links*), die gleichzeitig auf derselben Frequenz senden, sowie eine Zuweisung von Sendeleistungen (*power assignment*) $p: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Die SINR von Transmission $\ell = (s, r)$ ist nun definiert als

$$\gamma_\ell(\mathcal{L}, p) = \frac{\frac{p(\ell)}{d(s, r)^\alpha}}{\sum_{\ell'=(s', r') \in \mathcal{L}, \ell' \neq \ell} \frac{p(\ell')}{d(s', r)^\alpha} + \nu}.$$

Die Konstante $\nu > 0$ dient zur Modellierung von Hintergrundrauschen, das für alle Transmissionen identisch angenommen wird.

Bei den meisten Problemstellungen nehmen wir feste Datenraten an. In unserem Modell bedeutet dies, dass die SINR einen gewissen Schwellenwert für eine erfolgreiche Transmission überschreiten muss.

2 Capacity-Maximization Problem

Das *Capacity-Maximization Problem* ist die wahrscheinlich grundlegendste Fragestellung der kombinatorischen Optimierung im Zusammenhang mit dem oben dargestellten Interferenzmodell: Gegeben ist eine Menge von n Kommunikationsanfragen, von denen eine möglichst große Anzahl ausgewählt werden soll, die gleichzeitig bedient werden kann. Man unterscheidet dabei zwischen der Variante, in der die Sendeleistungen im Voraus festgelegt sind, und der Variante, in der der Algorithmus diese festlegen darf bzw. muss. Zunächst soll hier auf die zweitgenannte Variante eingegangen werden, wobei wir zusätzlich annehmen, dass für alle Anfragen derselben Schwellenwert β gilt, den die SINR jeweils erreichen muss.

Formal stellt sich diese Problemstellung wie folgt dar: Gegeben ist eine Menge $\mathcal{R} \subseteq V \times V$ von Kommunikationsanfragen. Es müssen nun eine Teilmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{R}$ und ein Power Assignment $p: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ausgewählt werden, so dass für alle gewählten $\ell \in \mathcal{L}$ gilt: $\gamma_\ell(\mathcal{L}, p) \geq \beta$. Das Ziel ist es, $|\mathcal{L}|$, die Größe der Menge $\mathcal{L}$, zu maximieren. Andrews und Dinitz [AD09] zeigten, dass dieses Problem NP-vollständig ist. Deshalb konzentrieren wir uns hier auf Approximationsalgorithmen.

Die wesentliche Schwierigkeit beim Entwurf eines Algorithmus für dieses Problem ist der Umgang mit der Auswahl der Sendeleistungen. Ein sehr einfacher Ansatz ist es, die Möglichkeit der Wahl der Sendeleistungen zu ignorieren und alle Sendeleistungen auf denselben, festen Wert zu setzen (*uniform power assignment*). Interessanterweise erreicht man auf diese Weise bereits Approximationsfaktoren von $O(\log \Delta)$, wie beispielsweise von Andrews und Dinitz [AD09] gezeigt. Hierbei ist $\Delta = \frac{\max_{(s, r) \in \mathcal{R}} d(s, r)}{\min_{(s, r) \in \mathcal{R}} d(s, r)}$, das heißt das

Verhältnis von größtem zu kleinsten Abstand, den ein Sender zu seinem Empfänger hat.

Bessere Ergebnisse können erreicht werden, indem man die Sendeleistung für einen Link $\ell = (s, r)$ abhängig vom Abstand von s und r setzt, nämlich proportional zu $\sqrt{d(s, r)^\alpha}$. Diese *Square-Root Power Assignments* wurden erstmalig in [FKRV09] untersucht. In mehreren, teilweise aufeinander aufbauenden Arbeiten von Halldórsson und anderen [Hal09, HM11, HHMW13] konnte gezeigt werden, dass auf diese Weise Approximationsfaktoren von $O(\log \log \Delta)$ möglich sind.

Jedoch hat auch diese Wahl einen deutlichen Nachteil: Sowohl für Uniform Power Assignments als auch für Square-Root Power Assignments gibt es Familien von Netzwerken (mit $\Delta = 2^n$ bzw. $\Delta = 2^{2^n}$), in denen nur Approximationsfaktoren der Größenordnung $\Omega(n)$ erreicht werden. Damit sind die erreichten Ergebnisse nicht entscheidend besser als die von trivialen Algorithmen: Bereits ein Algorithmus, der nur einen einzigen beliebigen Link auswählt, hat einen Approximationsfaktor von n .

Tatsächlich ist dies aber eine Schwäche des gesamten Ansatzes, Sendeleistungen nur abhängig vom Abstand zwischen Sender und Empfänger zu wählen. Fanghänel et al. [FKRV09] konnten zeigen, dass für alle Funktionen $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine Familie von Instanzen existiert, so dass mit dem Power Assignment $p(\ell) = f(d(\ell))$ nur Approximationsfaktoren in $\Omega(n)$ erreicht werden können. Dies führte zu der Frage, ob es Algorithmen gibt, die auf allen Instanzen eine nicht-triviale Approximationsgarantie erreichen.

In dieser Arbeit stellen wir den ersten Algorithmus mit konstantem Approximationsfaktor vor. Dies bedeutet, dass auf Instanzen beliebiger Größe – also unabhängig von n – die berechnete Lösung höchstens einen konstanten Faktor schlechter sein kann als die optimale Lösung. Diese Konstante hängt vom Pfadverlust-Exponenten α ab. Sie wurde nicht weiter optimiert, um die Analysen so einfach wie möglich zu halten und da besonders das asymptotische Verhalten von Bedeutung ist.

Der Algorithmus ist strukturell erstaunlich einfach. Im Gegensatz zu früheren Algorithmen wird zunächst die Link-Menge $\mathcal{L}$ ausgewählt und erst im Anschluss die Sendeleistung zugewiesen. Die Auswahl geschieht durch einen Greedy-Algorithmus. Er betrachtet die Links der Menge $\mathcal{R}$ nach steigendem Abstand zwischen Sender und jeweiligem Empfänger. Ein Link $\ell' = (s', r')$ wird hinzugefügt, wenn bezüglich der bislang ausgewählten Links gilt

$$\sum_{\substack{(s,r) \in \mathcal{L} \\ d(s,r) < d(s',r')}} \frac{d(s,r)^\alpha}{d(s,r')^\alpha} + \frac{d(s,r)^\alpha}{d(s',r)^\alpha} \leq \tau := \frac{1}{2 \cdot 3^\alpha \cdot (4\beta + 2)}.$$

Das bedeutet, dass die Abstände zwischen den Sendern und Empfängern des aktuell betrachteten Links und denen der zuvor ausgewählten groß genug sein müssen. Zur anschließenden Auswahl der Sendeleistungen würde es eigentlich ausreichen, ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Wir nutzen jedoch einen anderen Algorithmus. Es ist nämlich noch erforderlich, zu zeigen, dass es überhaupt Sendeleistungen gibt, die alle ausgewählten Transmissionen gleichzeitig erfolgreich machen. Dieser Algorithmus durchläuft die ausgewählten Links, nun aber nach fallendem Abstand zwischen Sender und Empfänger.

Die Sendeleistung für Link ℓ' wird dabei festgelegt auf

$$p(\ell') = 4\beta \sum_{\substack{(s,r) \in \mathcal{L} \\ d(s,r) > d(s',r')}} \frac{p(\ell)}{d(s,r)^\alpha} d(s',r')^\alpha .$$

Das bedeutet: Es wird eine Sendeleistung proportional zur minimalen Sendeleistung ausgewählt, die erforderlich wäre, um nur gegen die Interferenz der längeren Links anzukommen.

Aus Platzgründen kann hier leider nicht die Analyse vorgestellt werden. Sie besteht aus zwei größeren Teilen: Einerseits muss gezeigt werden, dass überhaupt eine gültige Lösung berechnet wird. Es ist nicht offensichtlich, dass im Endeffekt tatsächlich alle SINR-Bedingungen erfüllt sind. Andererseits ist natürlich auch noch die Approximationsgarantie zu zeigen; das heißt, dass der Approximationsfaktor durch eine Konstante beschränkt ist.

2.1 Erweiterungen

Der obige Algorithmus lässt sich in mehrfacher Hinsicht erweitern. Beispielsweise ist bislang nur vorgesehen, dass alle SINR-Schwellenwerte identisch sind. Mit einigen leichten Änderungen ist es auch möglich, individuelle Schwellenwerte zu berücksichtigen.

Dies ist insbesondere von Belang, um einen Algorithmus für flexible Datenraten zu entwerfen. Hier wird nicht mehr nur angenommen, dass eine Transmission entweder erfolgreich ist oder nicht. Vielmehr läuft die Übertragung – abhängig von der Signalqualität – mit einer unterschiedlichen Datenrate. Zur Modellierung wird kein Schwellenwert mehr auf die SINR angenommen, sondern allgemeiner eine Utility-Funktion u_ℓ , welche SINR-Werte auf die jeweilige Datenrate abbildet. Das Ziel ist nun, die Funktion $\sum_{\ell \in \mathcal{L}} u_\ell(\gamma_\ell(\mathcal{L}, p))$ zu maximieren. Dieses Problem kann mit Hilfe eines Algorithmus für das Problem mit Schwellenwerten gelöst werden. Hierbei wird in der Approximationsgarantie ein zusätzlicher Faktor $O(\log n)$ verloren.

Darüber hinaus können alle beschriebenen Techniken auch für vorgegebene Sendeleistungen angewendet werden. In der Arbeit wird gezeigt, wie ein von Halldórsson und Mitra [HM11] vorgestellter Algorithmus in analoger Weise analysiert und auf individuelle Schwellenwerte erweitert werden kann.

2.2 Simulationsergebnisse

Alle bislang vorgestellten Ergebnisse entstammen Worst-Case-Analysen. Diese könnten jedoch durch künstliche, pathologische Instanzen verfälscht werden. Um dies auszuschließen, führten wir einige Simulationen durch. Insbesondere interessierte uns hierbei, ob der Einfluss von unterschiedlichen Sendeleistungen tatsächlich derart bedeutsam ist, wie unsere Worst-Case-Analysen ergaben. Mittels nicht-konvexer Optimierung lösten wir deshalb zufällig erzeugte Instanzen des Capacity-Maximization Problem optimal. Interessanter-

weise stellte sich heraus, dass auch in diesem Fall Square-Root Power Assignments besser abschneiden als Uniform Power Assignments. Eine Optimierung der Sendeleistung führt jedoch zu noch deutlich besseren Ergebnissen. Insofern liefern die theoretischen Analysen Erkenntnisse, die auch in zufällig erzeugten Instanzen Bestand haben.

Weitere Simulationen zeigen, dass die von uns entwickelten Algorithmen zwei wünschenswerte Eigenschaften vereinen: In Bezug auf zufällig erzeugte Instanzen zeigen sie vergleichbare Ergebnisse wie frühere Algorithmen. Im Gegenzug ist jedoch bei unseren Algorithmen die Qualität der Lösung garantiert. Insbesondere ist sichergestellt, dass in keinem Netzwerk nur triviale Lösungen berechnet werden.

Wie eingangs erwähnt, war es das Ziel dieser Simulationen, zu evaluieren, ob Worst-Case-Analysen auch für andere Instanzen hilfreiche Erkenntnisse liefern können. Das benutzte Interferenz-Modell wurde hierbei nicht hinterfragt. Für zukünftige Untersuchungen könnte es interessant sein, die Algorithmen in realistischeren Modellen zu simulieren oder gar in realen Netzen zu testen. Das geht jedoch weit über diese Arbeit hinaus, deren Gegenstand die theoretische Analyse von Algorithmen ist.

3 Latency-Minimization Problem

Ein weiteres, sehr grundlegendes Problem ist das *Latency-Minimization Problem*. Hier müssen alle Anfragen in möglichst wenigen Zeitschritten bedient werden. Auch für diese Problemstellung untersuchen wir sowohl die Variante, in der die Sendeleistungen im Voraus gegeben sind, als auch diejenige, in der der Algorithmus die Sendeleistungen auswählt.

Aus den entsprechenden Capacity-Maximization-Algorithmen lassen sich für diese Probleme unmittelbar Algorithmen erstellen, indem jeweils iterativ die Ausnutzung des ersten Zeitschritts maximiert wird. Auf diese Weise erreichen wir für beide Varianten $O(\log n)$ -Approximationen.

Weiterhin analysieren wir einen verteilten Algorithmus für *Latency Minimization* mit festen Sendeleistungen. Dieser lässt alle Sender mit einer festen Wahrscheinlichkeit senden, bis diese zum ersten Mal erfolgreich sind. Wir zeigen, dass auf diese Weise eine $O(\log^2 n)$ -Approximation erreicht werden kann. Wir erweitern den Algorithmus, so dass die einzelnen Sender nur sehr wenige Informationen brauchen: Zunächst zeigen wir, wie die optimale Sendewahrscheinlichkeit gefunden werden kann. Darüber hinaus zeigen wir, dass es mit nur konstanten Kosten möglich ist, Acknowledgement-Transmissionen zu implementieren. Durch die Asymmetrie des Modells ist nämlich nicht sichergestellt, dass auch eine bestätigende Transmission vom Empfänger zum Sender erfolgreich wäre.

Darüber hinaus können vorhandene Ansätze mit unseren Algorithmen kombiniert werden, um Multi-Hop-Scheduling-Probleme zu lösen. Für diese erreichen wir ebenfalls Approximationsfaktoren, die poly-logarithmisch in n beschränkt ist.

4 Rayleigh-Fading

Das beschriebene einfache Pfadverlust-Ausbreitungsmodell lässt viele Faktoren außer Acht. So interferiert eine elektromagnetische Welle beispielsweise auch mit ihren eigenen Reflexionen. Diese Interferenz kann konstruktiv oder destruktiv sein – die Signalstärke kann hierdurch also verstärkt oder geschwächt werden. Dies hängt davon ab, wie sich die Laufwege der einzelnen Kopien der elektromagnetischen Welle unterscheiden. Als Folge treten in manchen Umgebungen starke Schwankungen der Signalstärke auf verhältnismäßig kleinen Abständen auf.

Um diese Effekte zu modellieren, wird häufig Rayleigh-Fading eingesetzt. Die Signalstärken werden hierbei als stochastisch angesehen. Eine Transmission ist auch hier erfolgreich, wenn die SINR hoch genug ist – diese ist jetzt allerdings eine Zufallsvariable.

Wir betrachten ein solches stochastisches Interferenzmodell erstmalig aus algorithmischer Perspektive. Interessanterweise sind wir durch eine *Black-Box-Transformation* in der Lage, alle Ergebnisse aus dem Modell ohne Fading zu übertragen. Hierbei verlieren wir nur einen Faktor von $O(\log^* n)$ im Approximationsfaktor. Das heißt, wir erreichen die ersten $O(\log^* n)$ -Approximationen für *Capacity Maximization* und $O(\log n \cdot \log^* n)$ -Approximationen für *Latency Minimization* im Rayleigh-Fading-Modell.

5 Sekundäre Spektrumsmärkte

Sekundäre Spektrumsmärkte sind ein möglicher Regulierungsmechanismus, um der Knappheit im Frequenzspektrum zu begegnen. In diesen Märkten werden Lizenzen für die Sekundärnutzung von aktuell ungenutzten Teilen des Spektrums verkauft. Diese Lizenzen gelten nur kurzzeitig und lokal; sie müssen deshalb regelmäßig automatisiert neu vergeben werden. Dabei ist Interferenz zwischen unterschiedlichen Sekundärnutzern zu berücksichtigen. Eine gängige Methode, um diese Märkte zu organisieren, sind Auktionen: Die möglichen Sekundärnutzer bieten auf Lizenzen für einzelne Teile des zur Verfügung gestellten Spektrums. Anschließend muss ein Mechanismus eine Zuordnung festlegen, so dass das Gemeinwohl (*social welfare*) maximiert wird.

Für unsere Betrachtungen dieses algorithmischen Problems nutzen wir eine Verallgemeinerung der bisherigen Interferenzmodelle. Wir nehmen an, dass die Interferenz über einen kantengewichteten Konfliktgraphen modelliert ist, dessen Knoten den Sekundärnutzern entsprechen. Eine Menge von Sekundärnutzern kann sich einen Kanal teilen, wenn sich für jeden Knoten das eingehende Kantengewicht der übrigen ausgewählten Knoten zu weniger als 1 aufsummiert.

Durch diese Modellierung als verallgemeinertes Independent-Set-Problem können die verschiedenen Varianten des oben beschriebenen SINR-Modells, aber auch eine Vielzahl weiterer Modelle dargestellt werden. Interessanterweise haben die dabei entstehenden Konfliktgraphen eine wichtige Gemeinsamkeit: Die *Inductive Independence Number* ρ [YB09] ist beschränkt durch eine Konstante oder eine schwach wachsende Funktion wie $O(\log n)$. Dies ermöglicht uns, die Nichtapproximierbarkeitsschranke von $\Omega(n^{1-\epsilon})$ des Maximum-

Independent-Set-Problems auf allgemeinen Graphen [Hås99] zu umgehen.

Durch Randomisiertes Runden von LP-Lösungen erhalten wir eine $O(\rho \cdot \log n)$ -Approximation für Maximum-Weight Independent Set auf kantengewichteten Konfliktgraphen. Dieser Algorithmus lässt sich auch auf das Szenario erweitern, in dem mehrere Kanäle zur Verfügung stehen. Wir erhalten unterschiedliche Approximationsfaktoren je nach Annahme, welche Struktur die Bewertungen der Nutzer haben, wenn diese mehrere Kanäle erhalten. Für k Kanäle insgesamt und keine weiteren Annahmen erhalten wir $O(\sqrt{k} \cdot \rho \cdot \log n)$ als Approximationsgarantie. Unter Bewertungsfunktionen, die allen Kanälen denselben Wert zurechnen, lässt sich dies auf $O(\rho \cdot (\log n + \log k))$ verbessern. Nimmt man stattdessen Submodularität an, erhält man für die wichtige Klasse der MRS-Bewertungen den Approximationsfaktor $O(\rho \cdot \log n)$.

Da es sich um eine Auktion handelt, ist davon auszugehen, dass sich die Nutzer als eigensinnige Bieter verhalten. Glücklicherweise können unsere Approximationsalgorithmen eingesetzt werden, um *Truthful-in-Expectation-Mechanismen* zu konstruieren. Diese stellen sicher, dass im Erwartungswert kein Bieter davon profitieren kann, eine unwahre Bewertung mitzuteilen. Hierzu setzen wir unter anderem das Framework von Lavi und Swamy [LS11] ein.

6 Dynamisches Scheduling

Als ein weiteres, komplexeres Problemszenario betrachten wir die Paketzustellung innerhalb eines Netzwerks. Wir nehmen an, dass über die Zeit verteilt Kommunikationsanfragen auftreten, die ausnahmslos zu erfüllen sind – mit möglichst geringen Wartezeiten. Für dieses Szenario verwenden wir eine andere Abstraktion als die oben genannten Konfliktgraphen, die uns nun erlaubt, verteilte Protokolle zu entwickeln. Wir führen ein stochastisches Modell und ein Worst-Case-Modell ein, um die Menge der auftretenden Anfragen zu quantifizieren und somit zu beschränken.

Ausgehend von Algorithmen für das entsprechende statische Scheduling-Problem konstruieren wir verteilte stabile Protokolle. Stabilität bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die erwartete Zeit für ein Paket zwischen Ankunft und Auslieferung beschränkt ist. Die Transformation hin zu dynamischen Protokollen ist komplizierter als bei vergleichbaren früheren Ansätzen [SV00, RT96], da die statischen Algorithmen, die wir als Ausgangspunkt nutzen, nicht zwangsläufig linear skalieren, wenn man die Eingabeinstanz skaliert. Trotzdem sind wir in der Lage, einen Durchsatz zu garantieren, der so groß ist wie der des statischen Algorithmus.

Im SINR-Modell mit festen Sendeleistungen arbeitet unser Ansatz perfekt mit dem oben genannten verteilten Algorithmus für Latency Minimization zusammen. Für den Fall, dass der Algorithmus die Sendeleistungen wählen muss, kann prinzipiell auch der oben genannte, zentralisierte Algorithmus verwendet werden. Es fehlt einzig ein verteilter Algorithmus für das statische Problem, um auch hier ein verteiltes, stabiles Protokoll zu konstruieren. In allen genannten Fällen weicht der Durchsatz in Netzwerken der Größe m vom bestmöglichen Durchsatz um Faktoren der Größenordnung $O(1)$ bis $O(\log^2 m)$ ab.

7 Fazit und Ausblick

In dieser Arbeit haben wir einige Algorithmen für die fundamentalen Optimierungsprobleme im Zusammenhang mit SINR-Modellen vorgestellt. Bei vielen dieser Algorithmen handelt es sich um die ersten, die nicht-triviale Approximationen auf allen Instanzen garantieren können. Trotz dieses eigentlich theoretischen Ursprungs erweisen sich die Algorithmen auch in Simulationen als konkurrenzfähig.

Auf einer grundsätzlicheren Ebene haben wir das Verständnis für die Modelle verbessert und neue Techniken für den Umgang mit ihnen eingeführt. Wir haben dies an zwei komplexeren Problemszenarien verdeutlicht, in denen das tatsächliche Interferenzmodell nicht mehr von derart großer Bedeutung war und sich die Analysen stattdessen auf eine abstraktere algorithmische Fragestellung konzentrieren konnten.

Nichtsdestoweniger gibt es weiterhin viel Raum für Verbesserungen. Zum Beispiel könnte man nach Algorithmen mit besseren Approximationsfaktoren suchen. Alternativ könnte man zeigen, dass dies nicht bzw. nicht beliebig möglich ist. Bis jetzt gibt es kaum Komplexitätstheoretische Ergebnisse zur Approximierbarkeit dieser Probleme.

Ein weiteres wichtiges Themengebiet ist Dezentralisierung. Für die meisten unserer Algorithmen nehmen wir an, die Positionen der Sender und die Interferenzbedingungen perfekt zu kennen. Plant man etwas Toleranz ein, reichen teilweise auch weniger präzise Daten. Trotzdem bleibt es eine offene Frage, wie viele Informationen in welcher Genauigkeit eigentlich erforderlich sind, um die Probleme zu lösen.

Die betrachteten SINR-Modelle sind deutlich realistischer als frühere Modelle. Dennoch berücksichtigen sie bei weitem noch nicht alle Aspekte, die für Funkübertragungen von Bedeutung sind. So ist es bislang nicht möglich, Hindernisse bei der Ausbreitung zu berücksichtigen. Dies scheitert bereits an der Tatsache, dass schon leichte Relaxierungen des Ausbreitungsmodells zu Nichtapproximierbarkeiten führen (siehe z. B. [Gou09]). Vergleichbares gilt auch für weitere unbeachtete Aspekte: In den meisten Fällen gibt es kein akzeptiertes Modell, das es erlaubt, die Effekte zu berücksichtigen, und gleichzeitig nicht-triviale Approximationen zulässt.

Schließlich könnte es interessant sein, andere Zielfunktionen zu betrachten. In dieser Arbeit war immer das Ziel, den Gesamtdurchsatz des Netzwerks zu optimieren. Andere bedeutsame Aspekte wie Fairness oder Energieverbrauch wurden außer Acht gelassen. Es ist jedoch zu hoffen, dass mit den entwickelten Techniken auch derartige Problemstellungen zu lösen sind.

Literatur

- [AD09] Matthew Andrews und Michael Dinitz. Maximizing capacity in arbitrary wireless networks in the SINR model: Complexity and game theory. In *Proceedings of the 28th Conference of the IEEE Communications Society (INFOCOM)*, Seiten 1332–1340, 2009.
- [FKRV09] Alexander Fanghänel, Thomas Kesselheim, Harald Räcke und Berthold Vöcking. Ob-

- livious interference scheduling. In *Proceedings of the 28th ACM Symposium on Principles of Distributed Computing (PODC)*, Seiten 220–229, 2009.
- [Gou09] Olga Goussevskaia. *Computational Complexity and Scheduling Algorithms for Wireless Networks*. Dissertation, ETH Zurich, 2009.
- [Hal09] Magnús M. Halldórsson. Wireless Scheduling with Power Control. In *Proceedings of the 17th annual European Symposium on Algorithms (ESA)*, Seiten 361–372, 2009.
- [Hås99] Johan Håstad. Clique is hard to approximate within $n^{1-\epsilon}$. *Acta Mathematica*, 182(1):105–142, 1999.
- [HHMW13] Magnús M. Halldórsson, Stephan Holzer, Pradipta Mitra und Roger Wattenhofer. The Power of Non-Uniform Wireless Power. In *Proceedings of the 24th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, Seiten 1595–1606, 2013.
- [HM11] Magnús M. Halldórsson und Pradipta Mitra. Wireless Capacity with Oblivious Power in General Metrics. In *Proceedings of the 22nd ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, Seiten 1538–1548, 2011.
- [Kes12] Thomas Kesselheim. *Approximation Algorithms for Spectrum Allocation and Power Control in Wireless Networks*. Dissertation, RWTH Aachen University, 2012.
- [LS11] Ron Lavi und Chaitanya Swamy. Truthful and Near-Optimal Mechanism Design via Linear Programming. *Journal of the ACM*, 58(6):25:1–25:24, Dezember 2011.
- [MW06] Thomas Moscibroda und Roger Wattenhofer. The Complexity of Connectivity in Wireless Networks. In *Proceedings of the 25th Conference of the IEEE Communications Society (INFOCOM)*, Seiten 1–13, 2006.
- [Rap01] Theodore Rappaport. *Wireless Communications: Principles and Practice*. Prentice Hall PTR, 2nd. Auflage, 2001.
- [RT96] Yuval Rabani und Éva Tardos. Distributed packet switching in arbitrary networks. In *Proceedings of the 28th annual ACM symposium on Theory of computing (STOC)*, Seiten 366–375, 1996.
- [SV00] Christian Scheideler und Berthold Vöcking. From static to dynamic routing: Efficient transformations of store-and-forward protocols. *SIAM Journal on Computing*, 30(4):1126–1155, 2000.
- [YB09] Yuli Ye und Allan Borodin. Elimination Graphs. In *Proceedings of the 36th International EATCS Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP)*, Seiten 774–785, 2009.



Thomas Kesselheim wurde am 29. November 1984 in Würselen geboren. Er wuchs in Geilenkirchen auf. Nach dem Abitur begann er sein Studium der Informatik an der RWTH Aachen, das er 2009 mit dem Diplom abschloss. Im Anschluss war er Doktorand unter Prof. Dr. Berthold Vöcking am Lehrstuhl für Informatik 1 der RWTH im Exzellenzcluster *UMIC*. Im Jahr 2012 promovierte er zu dem Thema *Approximation Algorithms for Spectrum Allocation and Power Control in Wireless Networks*. Seit 1. Februar 2013 ist er DAAD-Postdoc-Stipendiat an der Cornell University, Ithaca, NY, USA.