Entwicklung einer Komplexitätstheorie für randomisierte Suchheuristiken: Black-Box-Modelle*

Carola Winzen

Universität des Saarlandes und Max-Planck-Institut für Informatik
Campus E1 4
66123 Saarbrücken
winzen@mpi-inf.mpg.de

Abstract: Randomisierte Suchheuristiken sind problemunabhängige Algorithmen, die sowohl im wissenschaftlichen als auch im industriellen Kontext zur Optimierung von schwierigen Problemen genutzt werden. Sie sind einfach zu implementieren, lassen sich vielseitig einsetzen und liefern überraschend häufig bereits in kurzer Zeit sehr gute Ergebnisse. Daher sind randomisierte Suchheuristiken weit verbreitet. Ein großes Problem in Anwendung von randomisierten Suchheuristiken ist jedoch die Tatsache, dass sich schwer vorhersagen lässt, ob sich das zu optimierende Problem gut durch eine geeignete Heuristik lösen lässt oder ob andere problemspezifische Verfahren deutliche besser geeignet sind.

Mit meiner Dissertation leisten wir einen Beitrag zur Entwicklung einer Komplexitätstheorie für randomisierte Suchheuristiken. Unser langfristiges Ziel ist die Charakterisierung von Problemklassen in solche, die sich schnell und zuverlässig durch Suchheuristiken optimieren lassen und solche, für die grundsätzlich andere Methoden besser geeignet sind.

1 Einleitung

Trotz immer schnellerer Computer lassen sich viele Probleme unseres täglichen Lebens selbst mit den besten bekannten Methoden nicht effizient lösen. Für andere Probleme mag ein effizienter, auf das Problem zugeschnittener Algorithmus zwar existieren, jedoch würde die Entwicklung eines solchen zu lange dauern oder aber zu viele Kosten verursachen. In beiden Situationen bieten *randomisierte Suchheuristiken* eine geeignete Alternative zu maßgeschneiderten Algorithmen.

Randomisierte Suchheuristiken sind Algorithmen, die, basierend auf dem Prinzip des Zufalls und ohne das konkret zugrunde liegende Problem zu kennen, Lösungsvorschläge erstellen, diese evaluieren und sich durch (in der Regel lokale) Modifikationen nach und nach einer optimalen Lösung annähern. Damit sind randomisierte Suchheuristiken vielseitig einsetzbare Algorithmen, die aufgrund ihrer hohen Flexibilität nicht nur im industriel-

*Originaltitel der Arbeit: Toward a Complexity Theory for Randomized Search Heuristics: Black-Box Models. Die Dissertation ist in englischer Sprache verfasst.

len Kontext weit verbreitet sind, sondern auch im rein wissenschaftlichen Umfeld immer häufiger Anwendung finden.

Viele Suchheuristiken sind durch Phänomene der Natur inspiriert. So gibt es beispielsweise *evolutionäre* Algorithmen, *Ameisenalgorithmen* und *artifizielle Immunsysteme*, die auf in der Natur beobachteten Prinzipien aufbauen. Die beiden klassischen Suchheuristiken *Simulated Annealing* und *Threshold Accepting* hingegen haben Bausteine, die aus der Physik motiviert sind.

Eine der einfachsten Suchheuristiken ist der (1+1) evolutionäre Algorithmus (EA), dessen Pseudocode wir in Algorithmus 1 darstellen.

Algorithmus 1: (1+1) EA zur Maximierung einer Funktion $f\colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$.

Initialisierung: Wähle einen zufälligen Suchpunkt $x \in \{0,1\}^n$ und evaluiere $f(x)$;
Optimierung: for $t = 1, 2, 3, \ldots$ **do**
    Kopiere $y \leftarrow x$, flippe dann jeden Eintrag in y mit Wahrscheinlichkeit $1/n$ und evaluiere $f(y)$; //Variation
    if $f(y) \geq f(x)$ **then** $x \leftarrow y$; //Selektion

Wie viele Iterationen braucht der (1+1) EA, für eine gegebene Zielfunktion f, bis er zum ersten Mal einen *optimalen* Suchpunkt anfragt? Diese Frage ist Gegenstand der sogenannten *Laufzeitanalyse*. Trotz der vielen erfolgreichen Anwendungsbeispiele von Suchheuristiken in Wissenschaft und Praxis ist die Theorie der Laufzeitanalyse erst seit wenigen Jahrzehnten Betrachtungsgegenstand der Informatik. Insbesondere die Arbeiten von Ingo Wegener haben einen bedeutenden Beitrag zur Entwicklung einer konsistenten Theorie von randomisierten Suchheuristiken geleistet. Während wir jedoch heutzutage spezifische Algorithmen auf spezifischen Problemen untersuchen können, fehlt es uns derzeit an einem guten Verständnis, in welchen Situationen problemunabhängige Heuristiken in kurzer Laufzeit gute Lösungen liefern können. Eine Komplexitätstheorie ähnlich zu der in der klassischen Algorithmik ist daher wünschenswert.

Mit dieser Arbeit tragen wir zur Entwicklung einer solchen Komplexitätstheorie für Suchheuristiken bei. Wir zeigen zunächst anhand verschiedener Beispiele, dass existierende Modelle die Schwierigkeit eines Problems nicht immer zufriedenstellend erfassen. Wir schlagen daher ein weiteres Modell vor. In unserem *ordnungsbasierten Black-Box-Modell* lernen die Algorithmen keine exakten Funktionswerte, sondern bloß die Rangordnung der bislang angefragten Suchpunkte. Dieses Modell gibt für manche Probleme eine bessere Einschätzung der typischen Laufzeit von randomisierten Suchheuristiken. Jedoch gibt es auch im neuen Modell Funktionenklassen, deren Komplexität als zu gering einzuschätzen ist.

Ich hoffe den Leser dieser Kurzzusammenfassung meiner Dissertation davon überzeugen zu können, dass die Entwicklung einer Komplexitätstheorie für randomisierte Suchheuristiken eine spannende Aufgabe ist, dass es erste vielversprechende und interessante Ergebnisse gibt und dass die vorgeschlagenen Black-Box-Modelle viele spannende Fragestellungen zur weiteren Forschungsarbeit aufwerfen.

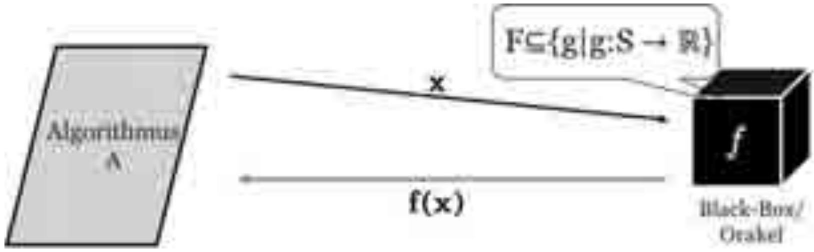

Abbildung 1: Illustration des Grundmodells

2 Die beiden Grundmodelle

Da randomisierte Suchheuristiken (RSH) problemunabhängig sind, können sie über das konkret zu lösende Problem nur Informationen erhalten, indem sie Lösungskandidaten, im Folgenden auch *Suchpunkte* genannt, evaluieren. Dabei gehen wir davon aus, dass diese Evaluierung von einem Orakel durchgeführt. Ist f die zu optimierende Funktion, so gibt das Orakel zu jedem angefragten Suchpunkt x dessen Funktionswert $f(x)$ preis. Die Heuristik „lernt" somit zwar den konkreten Wert $f(x)$, erhält jedoch keine weitere Information über die Funktion f. Diese Konstellation wird in der Literatur häufig *Black-Box-Optimierung* genannt.

Abbildung 1 illustriert das Grundmodell: das Orakel bzw. die Black-Box-wählt eine Klasse von Problemen $\mathcal{F}$ sowie eine konkrete Probleminstanz $f \in \mathcal{F}$. Wir nehmen an, dass die Probleme $\mathcal{F}$ als Funktionen $g : S \to \mathbb{R}$ modelliert sind. Die Menge S nennen wir *Suchraum,* die Elemente $x \in S$ *Suchpunkte.* Die Funktionenklasse $\mathcal{F}$ ist der Heuristik bekannt, nicht aber die konkrete Funktion f. Das Ziel der Heuristik ist die Maximierung von f. In jedem Schritt fragt die Heuristik einen Suchpunkt x an, woraufhin das Orakel dessen Funktionswert $f(x)$ preisgibt. Die Wahl des Suchpunktes x hängt in der Regel vom bislang angesammelten Wissen über f ab. Da wir uns für *randomisierte* Suchheuristiken interessieren, erlauben wir, dass der Algorithmus *zufällige* Entscheidungen trifft. Das heißt, wir nehmen an, dass der Algorithmus Zugriff auf einen (unbegrenzt langen) String von Zufallszahlen hat.

Ist nun $\mathcal{A}$ eine Klasse von Algorithmen und $A \in \mathcal{A}$ ein konkreter Algorithmus dieser Klasse, so bezeichnen wir mit $T(A, f)$ die erwartete Anzahl von Funktionsevaluationen (Anfragen an das Orakel) bis der Algorithmus A zum ersten Mal einen *optimalen* Suchpunkt $x \in \arg\max f$ anfragt (*first hitting time*). Wir nennen $T(A, f)$ die *Laufzeit* von Algorithmus A für die Funktion f. Die worst-case Laufzeit $\sup_{f \in \mathcal{F}} T(A, f)$ von A auf der Funktionenklasse $\mathcal{F}$ bezeichnen wir mit $T(A, \mathcal{F})$. Schließlich definieren wir, wie in der Komplexitätstheorie üblich, die *Komplexität von $\mathcal{F}$ für $\mathcal{A}$* als die bestmögliche worst-case Laufzeit, $\inf_{A \in \mathcal{A}} T(A, \mathcal{F})$.

Betrachten wir die Klasse $\mathcal{A}$ aller Algorithmen, so nennen wir $T(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ die *uneingeschränkte Black-Box-Komplexität von $\mathcal{F}$.* Dies ist die Black-Box-Komplexität, die Droste, Jansen und Wegener in ihrer Arbeit [DJW06] betrachten.

Obwohl die uneingeschränkte Black-Box-Komplexität viele interessante und zum Teil ungelöste Probleme hervorgebracht hat, mussten bereits Droste, Jansen und Wegener feststellen, dass die Betrachtung *aller* Black-Box-Algorithmen für viele Funktionenklasse eine als deutlich zu niedrig anzusehende Einschätzung der Komplexität gibt. Besteht beispielsweise $\mathcal{F}$ aus nur einer Funktion $\mathcal{F} = \{f\}$, so ist die uneingeschränkte Black-Box-Komplexität von $\mathcal{F}$ eins: ein optimaler Algorithmus für dieses Problem berechnet zunächst *offline*, das heißt ohne Interaktion mit dem Orakel, einen optimalen Suchpunkt $x \in \arg\max f$ und fragt diesen in der ersten Iteration an. Ein weiteres Beispiel für eine zu geringe Einschätzung der tatsächlichen Komplexität ist das MAXCLIQUE-Problem. Dieses NP-schwere Problem hat eine uneingeschränkte Black-Box-Komplexität von $O(n^2)$, zertifiziert durch den Algorithmus, der zunächst die Präsenz aller potentiell möglichen Kanten anfragt und dann offline eine maximale Clique berechnet.

2.1 Das unbiased Black-Box-Modell

Nachdem die Ergebnisse von Droste, Jansen und Wegener zunächst wenig Nachfolgearbeiten zur Komplexitätstheorie randomisierter Suchheuristiken hervorbrachten, nahm die Forschung zu Black-Box-Komplexität durch ein neues Modell von Lehre und Witt für pseudo-Bool'sche Funktionen $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ neue Fahrt auf. Lehre und Witt beobachten, dass viele Suchheuristiken in der Auswahl neuer Suchpunkte nicht sehr selektiv sind, sondern sowohl Bitpositionen als auch Bitwerte gleich (*unbiased*) behandeln. Daher betrachten sie nur solche Algorithmen, die diesem Schema folgen. Formal nennen wir eine Familie $(\mathcal{D}(. \mid y^1, \dots, y^k))_{y^1,\dots,y^k \in \{0,1\}^n}$ von Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\{0,1\}^n$ *k-adisch unbiased,* wenn sie für alle möglichen Inputs $y^1, \dots, y^k$ invariant unter Hamming-Automorphismen ist, das heißt, wenn sie für alle Permutationen σ von $[n] := \{1, \dots, n\}$ und alle Punkte $z \in \{0,1\}^n$ die folgende Bedingung erfüllt:

$$\forall x \in \{0,1\}^n : \mathcal{D}(x \mid y^1, \dots, y^k) = \mathcal{D}(\sigma(x \oplus z) \mid \sigma(y^1 \oplus z), \dots, \sigma(y^k \oplus z)) .$$

Die *k-adische unbiased Black-Box-Komplexität von $\mathcal{F}$* ist die Komplexität von $\mathcal{F}$ bezüglich aller k-adisch unbiased Black-Box-Algorithmen (Algorithmen, die dem Schema von Algorithmus 2 folgen).

Algorithmus 2: Modell eines k-adisch unbiased Black-Box-Algorithmus zur Maximierung einer Funktion $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$

Initialisierung: Wähle $x^0 \in \{0,1\}^n$ zufällig uniform. Frage $f(x^0)$ an;
for $t = 1, 2, 3, \dots$ **do**
  Abhängig von $\big(f(x^0), \dots, f(x^{t-1})\big)$ wähle k Indizes $i_1, \dots, i_k \in [0..t-1]$ sowie eine k-adische unbiased Familie $(D(. \mid y^1, \dots, y^k))_{y^1,\dots,y^k \in \{0,1\}^n}$ von Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\{0,1\}^n$;
  Ziehe x^t gemäß der Verteilung $D(. \mid x^{i_1}, \dots, x^{i_k})$. Frage $f(x^t)$ an;

3 Die ONEMAX-Funktionenklasse und Mastermind

Eine klassische Testfunktion in der Analyse randomisierter Suchheuristiken ist die Funktion ONEMAX, welche jedem Suchpunkt $x \in \{0,1\}^n$ die Anzahl der Einsen in x zuordnet. Die Laufzeiten von Heuristiken auf dieser Funktion wird häufig analysiert um zu verstehen, wie sich die Heuristik in „einfachen“ Bereichen des Optimierungsproblems verhält. Um einen Vergleich von unbiased Black-Box-Komplexität mit der uneingeschränkten Black-Box-Komplexität zu erlauben, betrachten wir in der Regel eine Verallgemeinerung der ONEMAX-Funktion: Für jeden Bitstring $z \in \{0,1\}^n$ definieren wir die Funktion OM_z, die jedem Suchpunkt $x \in \{0,1\}^n$ die Anzahl $|\{j \in [n] | z_j = x_j\}|$ der Übereinstimmungen von x mit z zuordnet. Mit ONEMAX_n bezeichnen wir die Menge $\{\text{OM}_z | z \in \{0,1\}^n\}$ aller solcher Funktionen.

Bereits 1963 haben Erdős und Rényi [ER63] gezeigt, dass die uneingeschränkte Black-Box-Komplexität von ONEMAX_n $\Theta(n/\log n)$ ist. Unwissentlich hat Chvátal [Chv83] dieses Ergebnis verallgemeinert: die uneingeschränkte Black-Box-Komplexität von ONEMAX_n ist $\Theta(n/\log n)$ auch dann, wenn wir statt der beiden „Farben“ $0, 1$ eine beliebe konstante Anzahl $k \in \mathbb{N}$ von Farben betrachten und ONEMAX_n auf natürliche Weise zu der Menge der Funktionen

$$\{\text{OM}_z : [k]^n \to [0..n], x \mapsto \{j \in [n] | x_j = z_j\} | z \in [k]^n\}$$

erweitern. In dieser Definition kürzen wir $[n] := \mathbb{N}_{\leq n} := \{1, \ldots, n\}$ und $[0..n] := [n] \cup \{0\} = \{0, 1, \ldots, n\}$ ab.

Die typische Laufzeit von randomisierten Suchheuristiken auf ONEMAX_n ist mit $\Theta(n \log n)$ Funktionsevaluationen sehr viel größer als die uneingeschränkte Black-Box-Komplexität von ONEMAX_n. Letztere spiegelt somit die Komplexität dieser sehr einfachen Funktionenklasse für randomisierte Suchheuristiken nicht gut wider. Dass Lehre und Witt zeigen können, dass die unäre (1-adische) unbiased Black-Box-Komplexität von ONEMAX_n von der Größenordnung $n \log n$ ist, macht ihr Modell zu einem interessanten Kandidaten für Black-Box-Modelle: Komplexität der Funktionenklasse und Laufzeit der Suchheuristiken stimmen überein.

Die Funktionenklasse ONEMAX_n ist sehr verwandt mit dem Mastermindspiel. Mastermind ist ein Brettspiel für zwei Personen. Der Kodierer, im Folgenden mit Carole bezeichnet, legt mit den bunten Spielstiften ein geheimes Codewort. Paul, der zweite Spieler soll dieses Codewort herausfinden. In jeder Runde gibt er dazu mit den bunten Spielstiften einen Rateversuch ab. Carole beantwortet jeden solchen Versuch mit schwarzen und weien Antwortstiften. Für jede Übereinstimmung des Rateversuchs mit dem geheimen Codewort gibt sie Paul einen schwarzen Antwortstift, für die richtige Farbe am falschen Platz je einen weißen. Pauls Ziel ist es, das Codewort mit möglichst wenig Rateversuchen herauszufinden. Black-Box-Algorithmen zur Optimierung von ONEMAX_n mit k Farben entsprechen genau den möglichen Strategien, die Paul im Mastermindspiel mit k Farben hat, wenn Carole statt mit schwarzen und weißen nur mit den schwarzen Antwortstiften antwortet und ihm somit nur die Anzahl der *genauen Übereinstimmungen* seines Rateversuchs mit ihrem geheimen Codewort bekannt gibt. Interessanterweise verändert die Reduktion auf schwarze Antwortstifte die asymptotische Komplexität des Mastermindspiels nicht.

4 Neue Ergebnisse zu den beiden Grundmodellen

Im ersten Teil der Dissertation beschäftigen wir uns mit den oben eingeführten Grundmodellen: dem uneingeschränkten Black-Box-Modell und den k-adischen unbiased Black-Box-Modellen. Für eine Reihe verschiedener Probleme zeigen wir, dass die Black-Box-Komplexitäten deutlich niedriger sind als die typischen Laufzeiten von Heuristiken.

Ergebnisse für die unbiased Black-Box-Modelle mit Aritäten ≥ 2. Lehre und Witt analysieren in [LW10] das unäre Black-Box-Modell, in dem Algorithmen nur einen einzigen Suchpunkt nutzen dürfen um einen neuen Suchpunkt zu finden. Solche Algorithmen nennen wir *mutationsbasiert*.

Im vierten Kapitel der Dissertation, welches auf der Veröffentlichung [DJK$^+$11] basiert, beschäftigen wir uns mit den unbiased Black-Box-Modellen für Aritäten ≥ 2. In diesen Modellen sind Algorithmen auch in der Lage zwei oder mehr Suchpunkte durch sogenanntes *Crossover* miteinander zu kombinieren. Eine wichtige Fragestellung in der Theorie randomisierter Suchheuristiken ist die nach dem Nutzen von Crossover-Operatoren. Während sie in der Praxis regelmäßig Anwendung finden, gibt es bislang nur wenig Evidenz, dass sie auch beweisbar bessere Ergebnisse liefern.

Wir zeigen, dass für $2 \leq k \leq n$ die k-adische unbiased Black-Box-Komplexität von $\textsc{OneMax}_n$ auf $O(n/\log k)$ fällt. Dieses Ergebnis lässt prinzipiell zwei Interpretationen zu. Zum einen liefert es eine Indikation, dass crossoverbasierte Algorithmen tatsächlich einen Vorteil gegenüber rein mutationsbasierten Algorithmen haben. Zum anderen wirft es die Frage auf, wie gut das unbiased Modell für Aritäten ≥ 2 die Wirklichkeit widerspiegelt. Die Antwort auf diese Frage kennen wir momentan nicht, glauben aber, dass in beiden Aussagen etwas Wahres liegt.

Zudem zeigen wir, dass auch für die Funktionenklasse $\textsc{LeadingOnes}_n$ die Komplexität von $\Theta(n^2)$ im unären Fall auf $O(n \log n)$ im binären (d. h. 2-adischen) Modell fällt. Die Funktion $\textsc{LeadingOnes} : \{0,1\}^n \to [0..n], x \mapsto \max\{j \in [0..n] | \forall i \leq j : x_i = 1\}$ misst die Länge des längsten Prefixes aus Einsen. Diese Funktion ist wie $\textsc{OneMax}$ eine Standardtestfunktion. Sie wird durch die Funktionenklasse $\textsc{LeadingOnes}_n :=$

$$\left\{\textsc{Lo}_{z,\sigma} : \{0,1\}^n \to \mathbb{N}, x \mapsto \max\{j \in [0..n] \mid \forall i \leq j : x_{\sigma(i)} = z_{\sigma(i)}\} \mid z \in \{0,1\}^n, \sigma \in S_n\right\}$$

auf natürliche Weise verallgemeinert.[1]

Diese Schranke von $O(n \log n)$ scheint auf den ersten Blick bestmöglich („scharf“) zu sein und es liegt nahe zu vermuten, dass diese Schranke auch für das uneingeschränkte Modell bestmöglich ist. Überraschenderweiser können wir jedoch zeigen, dass bereits die 3-adische unbiased Black-Box-Komplexität von $\textsc{LeadingOnes}_n$ höchstens $O(n \log n/ \log\log n)$ ist. Das ist das fünfte Kapitel der Arbeit (siehe auch [DW11a]). Interessanterweise sind die tatsächlichen Komplexitäten von $\textsc{LeadingOnes}_n$ in den verschiedenen Black-Box-Modellen bis heute nicht bekannt.

Ergebnisse für das unäre unbiased Black-Box-Modell. Die bislang vorgestellten Ergebnisse beschäftigen sich mit dem Vorteil von höheren Aritäten. Im sechsten Kapitel der

[1] Mit S_n bezeichnen wir die Menge aller Permutationen σ der Menge $[n]$.

Dissertation, welches auf der Veröffentlichung [DKW11] basiert, zeigen wir schließlich, dass auch das unäre unbiased Modell für manche Funktionenklassen eine als deutlich zu niedrig anzusehende Komplexität aufweist. Damit meinen wir, dass die unäre unbiased Komplexität deutlich niedrig ist als die typische Laufzeit von randomisierten Suchheuristiken. Unter anderem zeigen wir, dass ein NP-schweres Teilproblem von PARTITION eine unäre unbiased Black-Box-Komplexität von nur $O(n \log n)$ hat.

5 Das Black-Box-Modell mit beschränktem Speicher

Die im ersten Teil der Dissertation vorgestellten Ergebnisse zeigen, dass wir uns mit restriktiveren Modellen beschäftigen müssen, wenn wir über Black-Box-Komplexität eine realistische Einschätzung von Laufzeiten randomisierter Suchheuristiken erzielen wollen. Ein solches Modell, welches tatsächlich schon in der Arbeit [DJW06] vorgeschlagen wurde, beschränkt den Speicher von Suchheuristiken. Die dem Modell zugrunde liegende Beobachtung ist die Tatsache, dass sich viele Heuristiken nicht merken, welche Suchpunkte sie bereits angefragt haben. Stattdessen wird in der Regel sogar nur die beste bislang bekannte Lösung und deren Funktionswert gespeichert. Droste, Jansen und Wegener schlagen daher ein *memory-restricted* Modell vor. In diesem Black-Box-Modell mit beschränktem Speicher werden nur solche Algorithmen berücksichtigt, die zu jedem Zeitpunkt nur einen Suchpunkt und dessen Funktionswert speichern. Die Entscheidung für den nächsten Suchpunkt darf nur auf dem aktuellen Inhalt des Speichers basieren. Insbesondere hat der Algorithmus keinen Zugang zu einem Iterationszähler. Wurde ein zweiter Suchpunkt angefragt und dessen Funktionswert evaluiert, so muss der Algorithmus entscheiden, ob er seinen aktuellen Speicher durch den zuletzt gefragten Suchpunkte und dessen Funktionswert ersetzt oder ob der Speicher nicht aktualisiert und die neu gewonnene Information komplett verworfen wird.

Die Black-Box-Komplexität mit beschränktem Speicher lässt sich gut am Mastermind-Beispiel verdeutlichen. Wir spielen das Spiel mit nur zwei Reihen. Existiert eine leere Reihe, so kann Paul – basierend auf der Information, die auf dem Brett verfügbar ist – eine neue Vermutung abgeben. Carole sagt ihm, wie nah seine Farbkombination an ihrem Codewort ist. Sind beide Reihen des Spielbretts belegt, so muss Paul sich entscheiden, welche Reihe er auf dem Brett belässt und welche er entfernt. Beim Entfernen vergisst er zugleich die Information, die in dieser Reihe kodiert war. Zudem weiß er zu keinem Zeitpunkt, seit wie viele Runden die beiden das Spiel schon spielen.

Droste, Jansen und Wegener vermuten, dass diese Einschränkung des Speichers die Komplexität des Mastermindspiels mit zwei Farben, d. h. die Komplexität von $\textsc{OneMax}_n$, von $\Theta(n/\log n)$ im Grundmodell auf $\Omega(n \log n)$ im Modell mit beschränktem Speicher erhöht. Diese Vermutung widerlegen wir im siebten Kapitel der Dissertation, welches auf der Veröffentlichung [DW12] basiert und wohl als eines der Kernergebnisse dieser Arbeit bezeichnet werden darf. Wir zeigen, dass nicht nur $\textsc{OneMax}_n$ eine memory-restricted Black-Box-Komplexität von $O(n/\log n)$ hat, sondern dass dies auch die memory-restricted Komplexität des Mastermindspiels mit einer konstanten Anzahl k von Farben ist. Dieses Ergebnis ist bestmöglich, wie sich leicht durch informationstheoretische Argumente be-

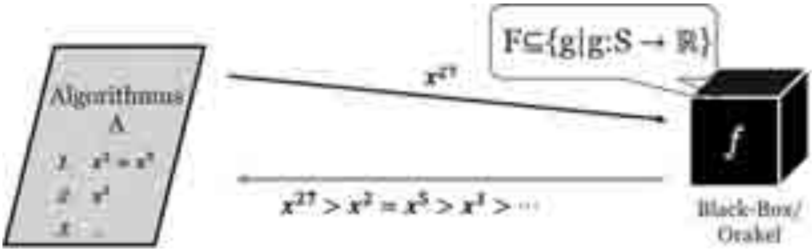

Abbildung 2: Illustration des ordnungsbasierten Modells

weisen lässt.

Eine Kernidee des Beweises ist die blockweise Identifizierung des Codewortes. Auf den verkleinerten Suchraum können wir die Ergebnisse von Erdős und Rényi [ER63] bzw. von Chvátal [Chv83] anwenden. Mit dieser Technik benötigen wir $O(s/\log s)$ Iterationen um einen Block der Länge $s = n^{\varepsilon}$ zu identifizieren, wobei $\varepsilon > 0$ eine beliebige Konstante ist. Da es $\lceil n/s \rceil$ solcher Blöcke gibt, ist die Gesamtlaufzeit $O(n/\log n)$. Da wir nur einen Suchpunkt (eine „Reihe“) als Speicherplatz haben, speichern wir die Antworten auf unsere Fragen in einem zu diesem Zeitpunkt ungenutzten Teil des Strings. Das wirft die Schwierigkeit auf, dass wir beim Kodieren der Antworten den String selber verändern und wir somit aufpassen müssen, wie wir Caroles Antworten interpretieren. Diese und verwandte Schwierigkeiten lösen wir durch eine aufwendige „Buchhaltung“.

6 Ein ordnungsbasiertes Komplexitätsmodell

Unser Ergebnis zum Modell mit beschränktem Speicher zeigt, dass hier durch aufwendige Techniken sehr viel Information gespeichert werden kann. Das spiegelt das Verhalten von randomisierten Suchheuristiken nicht gut wider. Daher schlagen wir im achten Kapitel der Dissertation (vgl. auch [DW11b]) ein neues ordnungsbasiertes Modell vor. Das Modell basiert auf der Überlegung, dass viele Heuristiken statt der *absoluten* Funktionswerte nur *relative* Funktionswerte bei der Auswahl des nächsten Suchpunktes zugrunde legen.[2] Daher beschränken wir uns in unserem *ordnungsbasierten Black-Box-Modell* auf solche Algorithmen, die demselben Prinzip folgen. Formal können wir dies erreichen, indem die Funktionsevaluation eines Suchpunktes x nicht dessen Funktionswert $f(x)$ preisgibt, sondern nur dessen relative Qualität unter allen bislang angefragten Suchpunkten.

Abbildung 2 illustriert dieses Modell. In diesem Beispiel weiß der Algorithmus aus seinen bisherigen Fragen bereits, dass Suchpunkte x^2 und x^5 besser sind als x^1, welcher wiederum besser ist als alle anderen bislang angefragten Suchpunkte. Basierend auf diesem Wissen , dass $f(x^2) = f(x^5) > f(x^1)$ gilt, fragt er nun Suchpunkt x^{27} an und bekommt als Antwort, dass dieser besser als alle bislang angefragten Suchpunkte ist.

[2] Im (1+1) evolutionären Algorithmus (vgl. Algorithmus 1) wird dies in Zeile 4 deutlich.

Wir zeigen, dass in diesem Modell die Black-Box-Komplexität von der Funktionenklasse BinaryValue_n, das am besten als gewichtete Version des Mastermindspiels illustriert werden kann, deutlich höher ist als deren uneingeschränkte Black-Box-Komplexität. Während die letztere nur $O(\log n)$ ist, ist die ordnungsbasierte Komplexität linear in n. Interessanterweise und für uns zunächst überraschend können wir für das ordnungsbasierte Black-Box-Modell jedoch auch zeigen, dass sich die Komplexität von OneMax_n in diesem Modell nicht verändert: sie ist wie im uneingeschränkten Fall $\Theta(n/\log n)$.

Ein nettes Beispiel für die Tatsache, dass das ordnungsbasierte Modell viele natürliche Fragen aufwirft, ist das folgende Waagenproblem: Gegeben seien n voneinander unterscheidbare Kugeln verschiedenen Gewichts. Wie oft müssen wir die vorhandene Apothekerwaage nutzen bis wir die n Kugeln in zwei Teilmengen gleichen Gewichts unterteilen können?

7 Anwendung auf kombinatorische Probleme

Im dritten Teil der Dissertation wenden wir die verschiedenen Black-Box-Modelle auf die beiden kombinatorischen Probleme „Minimum Spanning Tree“ und „Single-Source Shortest Paths“ an. Während das Problem minimaler Spannbäume auf natürliche Weise als Funktionenklasse $\{g : \{0,1\}^m \to \mathbb{R}\}$ modelliert werden kann, ist die Modellierung des Problems der Berechnung kürzester Wege nicht eindeutig. In der Regel wird eine Modellierung als Klasse von Funktionen $\{g : [n]^n \to \mathbb{R}\}$ bevorzugt. Aus diesem Grund führen wir in diesem Kapitel auch verschiedene Möglichkeiten zur Verallgemeinerung des unbiased Black-Box-Modells ein. Dieses Kapitel basiert auf der Veröffentlichung [DKLW11].

8 Zusammenfassung

Mit dem Ziel eine Komplexitätstheorie für randomisierte Suchheuristiken (RSH) zu entwickeln haben wir die Black-Box-Komplexitäten verschiedener Funktionenklassen in den beiden Grundmodellen sowie im Modell mit beschränktem Speicher analysiert. Zudem haben wir ein ordnungsbasiertes Komplexitätsmodell vorgeschlagen, welches für manche Funktionenklassen eine bessere Einschätzung ihrer Optimierbarkeit durch RSH liefert. Keines der untersuchten Modelle scheint jedoch typische Laufzeiten von randomisierten Suchheuristiken auf *allen* Funktionenklassen widerzuspiegeln.

Die vorgelegte Dissertation wirft eine Reihe interessanter Fragestellungen auf. Zwei Beispiele für vielversprechende Anknüpfungspunkte sind zum einen die Frage nach anderen, potenziell besser geeigneten Komplexitätsmodellen, zum anderen aber auch die Nutzung der Erkenntnisse aus den Black-Box-Modellen zur Entwicklung besserer Suchheuristiken. Zudem gibt es eine Vielzahl von Problemen, deren Black-Box-Komplexität nicht bekannt ist. Insbesondere für die Berechnung von *unteren Schranken* scheinen die vorhandenen Methoden nicht auszureichen. Eine Weiterentwicklung der Beweistechniken in randomisierten Modellen ist daher erstrebenswert.

Literatur

[Chv83] Vasek Chvátal. Mastermind. *Combinatorica*, 3:325–329, 1983.

[DJK+11] Benjamin Doerr, Daniel Johannsen, Timo Kötzing, Per Kristian Lehre, Markus Wagner und Carola Winzen. Faster Black-Box Algorithms Through Higher Arity Operators. *Proc. of the 11th ACM Workshop on Foundations of Genetic Algorithms (FOGA)*, Seiten 163–172, 2011.

[DJW06] Stefan Droste, Thomas Jansen und Ingo Wegener. Upper and Lower Bounds for Randomized Search Heuristics in Black-box Optimization. *Theory of Computing Systems*, 39:525–544, 2006.

[DKLW11] Benjamin Doerr, Timo Kötzing, Johannes Lengler und Carola Winzen. Black-Box Complexities of Combinatorial Problems. *Proc. of the 13th Annual Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO)*, Seiten 981–988, 2011.

[DKW11] Benjamin Doerr, Timo Kötzing und Carola Winzen. Too Fast Unbiased Black-Box Algorithms. *Proc. of the 13th Annual Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO)*, Seiten 2043–2050, 2011.

[DW11a] Benjamin Doerr und Carola Winzen. Breaking the $O(n \log n)$ Barrier of Leading-Ones, 2011. Veröffentlichung ausstehend.

[DW11b] Benjamin Doerr und Carola Winzen. Towards a Complexity Theory of Randomized Search Heuristics: Ranking-Based Black-Box Complexity. *Proc. of the 6th International Computer Science Symposium in Russia (CSR)*, Seiten 15–28, 2011.

[DW12] Benjamin Doerr und Carola Winzen. Playing Mastermind With Constant-Size Memory. *Proc. of the Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS)*, Seiten 441–452, 2012.

[ER63] Paul Erdős und Alfréd Rényi. On Two problems of Information Theory. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, 8:229–243, 1963.

[LW10] Per Kristian Lehre und Carsten Witt. Black-box Search by Unbiased Variation. *Proc. of the 12th Annual Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO)*, Seiten 1441–1448, 2010.

Carola Winzen wurde am 5. März 1984 in Würselen geboren. Nach einem Schüleraustausch in Tobatí, Paraguay, im Schuljahr 2000/01 zog sie nach Konstanz, wo sie 2003 ihr Abitur mit der Note 1,0 ablegte. Das Studium der Mathematik absolvierte Frau Winzen an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel in nur 8 Semestern (Gesamtnote *sehr gut*). Nach Beendigung des Studiums entschied sich Frau Winzen zunächst bei der Unternehmensberatung McKinsey & Company erste Berufserfahrungen zu sammeln. Dort arbeitete sie 2 Jahre lang vor allem an Netzwerkoptimierungs- und Fahrplanproblemen.

Im Januar 2010 nahm sie das Promotionsstudium der Informatik an der Universität des Saarlandes auf. Am Max-Planck-Institut für Informatik arbeitet sie in Gruppe „Algorithmen und Komplexität" von Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Kurt Mehlhorn. Die Promotionsprüfung legte Frau Winzen am 16. Dezember 2011 mit der Gesamtnote *summa cum laude* ab. Ihr Promotionsstudium wurde durch das Google Europe Fellowship in Randomized Algorithms gefördert.