

CAS-unterstütztes Assessment von Mathematik

M. Kallweit
(Ruhr-Universität Bochum)

michael.kallweit@rub.de



Digitales Assessment

Die steigende Verbreitung von eLearning-Angeboten ist nicht nur den neuen Lehr- und Lernmöglichkeiten geschuldet. Oftmals sind es knappe Ressourcen und der Wunsch die herkömmliche Lehre zu entlasten, die den Einsatz digitaler Tools vorantreiben. Neben didaktisch und medial aufbereiteten Materialien (welche ohne neuen Aufwand immer wieder verwendet werden können) sind es Routine-Übungsaufgaben, die man in elektronische Systeme auslagern möchte.

Mathematikfertigkeiten, die klassischerweise über Papieraufgaben abgefragt und von einer Lehrperson korrigiert werden, digital zu überprüfen, stellt hohe Anforderungen an das zugrundeliegende technische System.

Wirft man einen Blick in die digitale Landschaft vorhandener Lernmaterialien und Aufgaben, so werden am häufigsten geschlossene Antwortformate verwendet. Bei diesen werden dem Nutzer Antwortmöglichkeiten präsentiert und es muss die richtige ausgewählt werden. Neben Multiple-Choice zählen auch Zuordnungs- und Sortieraufgaben zu diesem Typus. Gefordert wird hierbei vom Nutzer eine (alleinige) Identifikations- und Selektionsleistung.

Andere wichtige Fähigkeiten, wie das Konstruieren von mathematischen Objekten (z.B. ein gesuchter algebraischer Term), verlangen nach weitergehenden Formaten, den offenen Aufgaben. Die Antwort muss dabei selbst erdacht und in ein System eingegeben werden. Nahezu alle eLearning-Plattformen bieten die Möglichkeit eine freie Eingabe mittels Stringvergleich oder mit regulären Ausdrücken auszuwerten. Für die Eingabe von Zahlen lassen sich numerische Toleranzbedingungen einstellen. Eine Behelfsmöglichkeit für die Abfrage von Termen lässt sich z.B. im System MUMIE [4] finden. Dort wird die Übereinstimmung eines eingegebenen Funktionsterms mit der Musterlösung durch eine numerische Auswertung der Terme an vielen zufälligen Stellen getroffen.

Einen Überblick über vorhandene computerunterstützte Assessmentssysteme findet man in [2].

Unterstützung durch CAS

Flexibilität bei der Behandlung symbolischer Aus-

drücke gewinnt man durch den Einsatz von Computeralgebrasystemen. Die verbreitetsten Learning-Management-Systeme (LMS) sind Client-Server-Anwendungen, wobei als Client zumeist der Internetbrowser fungiert. Ein CAS kann hier auf der Seite des Clients (z.B. auf Javascript-Basis) oder serverseitig eingebracht werden. Robuster und aus prüfungstechnischer Sicht sicherer ist der Einsatz eines CAS im Backend, weshalb die meisten Systeme diesen Weg wählen.

STACK

Die Software STACK ist ein quelloffenes Assessmentsystem für mathematische Fragestellungen, welches im Hintergrund das CAS Maxima [6] verwendet. STACK lässt sich in verschiedene Lernplattformen einbinden; zur Zeit stehen Plugins für Moodle [7] und Ilias [3] zur Verfügung. Die Möglichkeiten von STACK werden in [1] beschrieben und im Nachfolgenden genauer vorgestellt.

Möglichkeiten zur Antwortauswertung

Die einfachste Art der Auswertung ist der Vergleich mit einer hinterlegten Musterlösung. Da sich jedoch mathematische Objekte mit unendlich vielen verschiedenen Textausdrücken beschreiben lassen, ist hierbei der Rückgriff auf die Methoden des CAS zur Vereinfachung und Normalisierung von Ausdrücken unabdingbar. Abbildung 1 beschreibt einen einfachen Algorithmus.

```
IF simplify(input - solution) = 0
  THEN mark := 1
  ELSE mark := 0
```

Abbildung 1: Auswertung durch Vergleich mit Lösung

Je nach didaktischem Konzept der Aufgabe sind weitere Verfahren zur Eingabeüberprüfung nutzbar. STACK kennt verschiedene Tests auf Gleichheit, wie z.B. algebraische Äquivalenz von Termen, Äquivalenz von Gleichungen (auch falls verschiedene Variablen verwendet wurden) und Gleichheit des Ableitungsbaums des CAS-Parsers. Hinzukommen Tests, die vielfältige formale Aspekte überprüfen können (u.a. ob ein Bruch vollständig gekürzt ist, oder die Eingabe komplett ausmultipliziert ist), verschiedene numerische Tests, Methoden für Zeichenketten (wie reguläre Ausdrücke) und

für einige spezielle Situationen (wie Differentiation und Integration):

Gleichheit: CasEqual, EqualComAss, AlgEquiv, SubstEquiv, SameType, SysEquiv

Form: LowestTerms, Expanded, FacForm, SingleFrac, PartFrac, CompletedSquare

Numerik: NumRelative, NumAbsolute, NumSigFigs, GT, GTE

Zeichenketten: String, StringSloppy, RegExp

Weitere: Factorisation of polynomials, Diff, Int

Damit wird ein breites Spektrum an tiefergehenden Aufgaben möglich. Die Beispielaufgabe in Abbildung 2 zeigt eine offene Modellierungsfrage, in der zu einem genannten Problem eine Gleichung aufgestellt und gelöst werden muss.

Eine Seite eines Rechtecks ist 5cm länger als die andere. Der Flächeninhalt ist 24cm^2 . Gesucht sind die Seitenlängen.

1. Geben Sie eine Gleichung ein, die die Seitenlängen mit dem Flächeninhalt in Beziehung bringt.
2. Geben Sie die Lösungen ihrer Gleichung aus 1 ein.
3. Geben Sie die Seitenlängen des Rechtecks ein.

Abbildung 2: Eine Modellierungsaufgabe

Auch Realisierungsaufgaben, in denen der Nutzer gefordert ist, ein Beispiel für einen mathematischen Sachverhalt einzugeben, lassen sich umsetzen, siehe Abbildung 3.

Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, die an der Stelle $x = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Abbildung 3: Eine Realisierungsaufgabe

Rückmeldebäume und individuelles Feedback

Doch mit dem Rückgriff auf das CAS lässt sich noch weit mehr bewerkstelligen. So ist es in dem STACK-Aufgabentyp möglich, zunächst mathematische Eigenschaften der Nutzereingabe als Zwischenergebnisse zu berechnen und von diesen die weitere Auswertung abhängig zu machen. STACK verwaltet die Struktur dieser Verzweigungen in einem sogenannten Rückmeldebäum, ein Beispiel ist in Abbildung 4 gegeben.

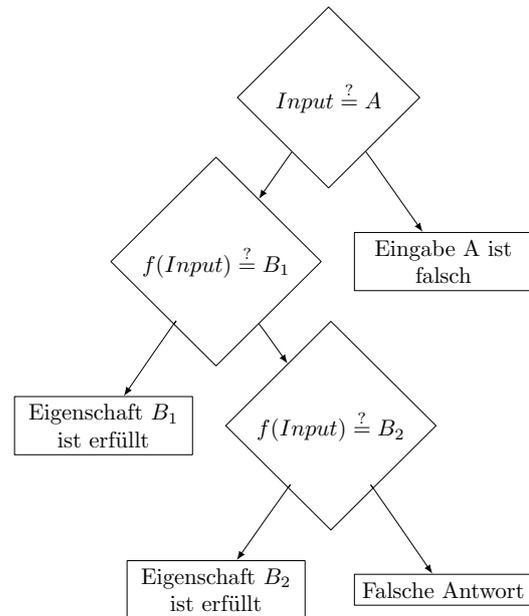


Abbildung 4: Rückmeldebäum

An jedem Knoten des Baums kann man wählen, welcher der oben genannten Tests mit der Eingabe oder den berechneten Zwischenergebnissen ausgeführt wird. Dabei lässt sich zusätzlich für jede der beiden Verzweigungen eines Knotens (und damit insbesondere bei den Blättern) eine (Teil-)Bepunktung festlegen. Beim formativen Assessment als Lernszenario kann dieses durch entsprechendes textliches Feedback ergänzt werden.

In der Beispielaufgabe 3 könnte man zur Bewertung der Nutzereingabe zunächst die beiden Eigenschaften *stetig bei 0* und *differenzierbar bei 0* mittels CAS bestimmen und dann entsprechende Bepunktungen ausgeben. Dabei kann die textliche Rückmeldung an den Nutzer, wenn gewünscht, diese Auswertungen aufgreifen und beispielsweise rückmelden, dass die eingegebene Funktion zwar stetig an der Stelle 0, aber auch differenzierbar ist (was sie laut Aufgabenstellung nicht sein sollte).

Die bei einer Auswertung durchlaufenen Knoten ergeben die Gesamtpunkte und das Gesamtfeedback.

Randomisierte Aufgaben

Neben den Vorteilen zur Auswertung und der Generierung eines individuellen Feedbacks, lässt das CAS sich auch direkt bei der Erzeugung der Aufgabe nutzen. In STACK können sogenannte Aufgabenvariablen definiert werden um Vorberechnungen vorzunehmen. Noch vor der Anzeige des Aufgabentextes werden diese Variablen durch die konkreten vom CAS berechneten Ergebnisse ersetzt. So lassen sich zur Laufzeit konstruierte mathematische Objekte für eine Aufgabe jedes mal neu erzeugen. Bereitgestellte Zufallsfunktionen ermöglichen eine automatische Variation, was gezielt für didaktische Zwecke genutzt werden kann. Jeder Lernende bekommt seine eigene Aufgabenvariante. Kooperation mit anderen ist nur noch über die zugrundeliegenden Konzepte möglich. Ein naives Abschreiben funktioniert nicht mehr.

Möchte der Lehrende Musterlösungen bereitstellen,

können diese direkt mit dem Gesamtfeedback ausgegeben werden. Auch hier kann das CAS genutzt werden, um diese aus der (randomisierten) individuellen Aufgabenstellung zu generieren.

Anforderungen an das CAS

Um die zuvor beschriebenen Funktionalitäten zu erreichen, muss das verwendete CAS einige Voraussetzungen erfüllen. Maxima hat sich hier als vielfach verwendete Lösung herauskristallisiert. Als weitere Beispiele neben STACK sind hier das System LON-CAPA [5] und das hochschulübergreifende Studienorientierungsportal Studifinder [8] zu nennen.

Im Praxiseinsatz sind die technischen Anforderungen von entscheidender Bedeutung. Ein schneller Start des CAS und zügige Verarbeitung der Anfragen des LMS müssen gewährleistet sein. Als Lisp-Programm kann Maxima zur Laufzeit mit vollständig geladenem STACK-Code als Snapshot gespeichert werden, was einen schnellen Wiederaufruf zur Folge hat. Soll das System zeitgleich viele parallele Nutzeranfragen verarbeiten, lässt es sich als Cluster mit mehreren Instanzen betreiben. Da sich Anfragen ans CAS mit der Zeit durchaus wiederholen können (insbesondere bei mehrfacher Verwendung der gleichen Aufgaben), kann ein ausgeklügeltes Cachingverfahren für weiteren Geschwindigkeitszuwachs sorgen.

Auf mathematisch funktioneller Seite bedingen die bereitgestellten Funktionen des CAS die Möglichkeiten zur Aufgabengestaltung.

Selbst bei dem einfachen Auswertungsalgorithmus in Abbildung 1 sind hohe Ansprüche an das CAS gestellt. Die Eingabe des Nutzers kann beliebig kompliziert und komplex sein. Terme mit geschachtelten Wurzeln und trigonometrische Funktionen zeigen oftmals die Grenzen der Vereinfachungsfunktionen¹⁰ auf.

Tests, die die Form einer Eingabe bemessen, sind darauf angewiesen bestimmte automatische Berechnungen (wie Zusammenfassung gleicher Variablenpotenzen) lokal abzuschalten. Grundlegende Regeln wie die Kommutativität der Addition und Multiplikation, behindern die Überprüfung eines bestimmten geforderten Formates (z.B. eine Normalform für Funktionsklassen). Manchmal kann gerade die Anwendung einer elementaren Handlung wie Ausmultiplizieren das eigentliche Testziel sein.

Die Verzweigungen im Rückmeldebaum basieren vielfach auf mathematischen Eigenschaften der Ein-

gabe. Hierfür sind Prädikatsfunktionen ungemein hilfreich. Methoden um z.B. die Stetigkeit oder Differenzierbarkeit einer Funktion oder die Diagonalisierbarkeit einer Matrix boolesch zu entscheiden werden benötigt.

Im Idealfall sind zwei zufällig generierte Aufgabenausprägungen didaktisch äquivalent, d.h. werden von Personen vergleichbarer Fähigkeit auch gleich gut bearbeitet. Dies stellt eine besondere Herausforderung für die Aufgabenkonstruktion dar. Zum Teil wird weitergehende Mathematik benötigt, um die gewünschten mathematischen Objekte mittels CAS zu erstellen (man denke hier an *schöne* Vektoren für das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren). Funktionen, um solche zufälligen Objekte direkt zu erzeugen (bestenfalls mit Bedingungen), entlasten den Aufgabenersteller.

Ausblick

STACK findet zunehmend Verwendung in Schulen und Hochschulen. Übergreifende Nutzernetzwerke bauen gemeinsame Aufgabendatenbanken auf. Viele interessante Weiterentwicklungen, wie mehrsprachige Aufgaben oder Eingaben über dynamische Geometriesoftware, werden durch internationale Institutionen eingebracht. Es ist davon auszugehen, dass STACK oder ähnliche CAS-basierende Systeme in Zukunft noch weitere Verbreitung erfahren werden und den Bereich digitalen Testens weiter bereichern werden.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Kallweit, Mathematik-Kompetenzen überprüfen und fördern - Automatisiert Lehren und Lernen mit STACK, *Tagungsband zum Workshop der ASIM/GI-Fachgruppen*, Argesim Report AR 50, 2015
- [2] C. J. Sangwin, *Computer Aided Assessment of Mathematics*, Oxford University Press 2013.
- [3] www.ilias.de/docu/goto_docu_cat_4119.html
- [4] www.integral-learning.de
- [5] www.lon-capa.org/cas.html
- [6] maxima.sourceforge.net
- [7] moodle.org/plugins/qtype_stack
- [8] www.studifinder.de

¹⁰Ganz zu Schweigen vom Fehlen einer klaren Definition von *einfach*.