

Algorithmische Strategien für anwendbare reelle Quantorenelimination

Andreas Dolzmann

Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Passau
<http://www.dolzmann.de/>

Eines der bedeutendsten Verfahren zur reellen Quantorenelimination ist die Quantorenelimination mittels virtueller Substitution, die von Weispfenning 1988 eingeführt wurde. In der vorliegenden Arbeit werden zahlreiche algorithmische Strategien zur Optimierung dieses Verfahrens präsentiert. Optimierungsziele der Arbeit waren dabei die tatsächliche Laufzeit der Implementierung des Algorithmus sowie die Größe der Ausgabeformel. Zur Optimierung werden dabei die Simplifikation von Formeln erster Stufe, die Reduktion der Größe der Eliminationsmenge sowie das *Condensing*, ein Ersatz für die virtuelle Substitution, untersucht. Lokale Quantorenelimination berechnet Formeln, die nur in der Nähe eines gegebenen Punktes äquivalent zur Eingabeformel ist. Diese Einschränkung erlaubt es, das Verfahren weiter zu verbessern. Als Anwendung des Eliminationsverfahren diskutieren wir abschließend, wie man eine große Klasse von Schedulingproblemen mittels reeller Quantorenelimination lösen kann. In diesem Fall benutzen wir die spezielle Struktur der Eingabeformel und zusätzliche Informationen über das Schedulingproblem, um die Quantorenelimination mittels virtueller Substitution problemspezifisch zu optimieren.

1 Einleitung

Wir betrachten die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen. Oftmals macht man Annahmen über Zahlen, wie z. B. $x^2 - 2x + 1 + y^2 < 0$. Wir betrachten *Terme*, die durch Kombination von ganzen Zahlen und Variablen durch die gewohnten arithmetischen Operationen „+“, „-“ und „·“ entstehen. Potenzen von Variablen wie x^2 lesen wir als abkürzende Schreibweise für Produkte wie $x \cdot x$. Es folgt sofort, daß wir nur natürliche Zahlen als Potenzen zulassen, und daß keine Variablen im Exponenten stehen dürfen. Alle Terme lassen sich als multivariate Polynome in einem geeigneten Polynomring über den ganzen Zahlen auffassen. Terme werden mit den üblichen Relationen „=“, „≠“, „<“, „>“, „≤“, „≥“ zu *atomaren Formeln* kombiniert. Sie lassen sich immer äquivalent in der Form $t \varrho 0$ für einen Term t und eine Relation ϱ schreiben. Zusätzlich lassen wir die Wahrheitswerte „true“ und „false“ zu. Atomare Formeln werden zusammen mit den logischen Operationen „∧“, „∨“ und „¬“ zu *quantorenfreien Formeln* kombiniert. Schließlich betrachten wir noch Quantoren der Form „ $\exists x$ “ und „ $\forall x$ “ und erhalten damit *Formeln erster Stufe*.

Eine reelle Quantorenelimination berechnet zu einer beliebigen Formel φ erster Stufe eine äquivalente quantorenfreie Formeln φ' . In unserem Beispiel ist „true“ ein solches quantorenfrees Äquivalent. Natürlich können in der quantorenfreien Beschreibung noch *Parameter*, d. h. nicht durch Quantoren gebundenen Variablen, auftreten. In unserem Beispiel wären dies die Variablen c_0 , c_1 und c_2 . Wir geben abschließend dazu ein Beispiel: Wir betrachten die Formel $\exists x(ax + b = 0)$, die besagt, daß eine affin-lineare Funktion eine

Nullstelle besitzt. Offensichtlich ist $a \neq 0 \vee b = 0$ eine äquivalente quantorenfreie Formel. Diese bietet notwendige und hinreichende Bedingungen an die Parameter, daß die Originalformel gilt.

Weispfenning stellte 1988 [Wei88] ein Quantoreneliminationsverfahren für *lineare Formeln* in geordneten Körpern vor. Lineare Formeln sind Formeln, deren gebundene Variablen weder in höheren Potenzen vorkommen noch miteinander multipliziert werden. Wir bezeichnen dieses Verfahren als Quantorenelimination mittels *virtueller Substitution*. In den letzten 10 Jahren hat Weispfenning sein Verfahren auf Formeln beliebigen Grades erweitert [Wei94b, Wei97]. Für lineare und quadratische Formeln ist das Verfahren bereits mehrfach implementiert worden. Die ausgereifteste Implementierung ist im REDUCE-Paket REDLOG, des Autors *et al.* [DS97, DS99], enthalten.

2 Simplifikation von Formeln

In diesem Kapitel skizzieren wir einen Algorithmus zur *Simplifikation* von Formeln, d. h. zur Berechnung einer zur Eingabeformel äquivalenten Formel, die in einem gewissen Sinne einfacher ist. Ein solcher Algorithmus heißt *Simplifier*. Simplifikation von Formeln ist ein zentraler Algorithmus bei der automatischen Verarbeitung Formeln erster Stufe. Wir verwenden ihn im Rahmen unserer Quantorenelimination zur Vereinfachung der Ergebnisformel und aller Zwischenergebnisse.

Hauptziel unserer Simplifikation ist es, die Anzahl der atomaren Formeln einer Formel zu reduzieren. Weitere Ziele sind die Vereinfachung der Terme in den atomaren Formeln und die Vereinfachung der booleschen Struktur. Daneben betrachten wir Simplifikationsziele, die eher technischer Natur sind und die darauf aufbauenden Algorithmen unterstützen. Einige dieser Ziele können sich dabei durchaus widersprechen. Wir beschränken uns hier auf die Darstellung der für die Quantorenelimination relevanten Strategien zur Simplifikation von Formeln.

Die Simplifikation atomarer Formeln ist der Grundbaustein unseres Simplifiers. Wir berechnen eine – nicht eindeutige – Normalform der atomaren Formeln. Dazu verwenden wir insbesondere Techniken aus der Polynomfaktorisierung. Wir haben zusätzlich Heuristiken, einige atomare Formeln als widersprüchlich oder als allgemeingültig zu erkennen. Um das Simplifikationsziel der einfachen Terme, auf Kosten der Anzahl atomarer Formeln, zu erreichen, betrachten wir auch Simplifikationen, die aus einer atomaren Formel eine komplexe Formel generieren. Ein Beispiel ist die Simplifikation von $x^2z^2 + y^2z^2 \neq 0$ zu $(x \neq 0 \wedge z \neq 0) \vee (y \neq 0 \wedge z \neq 0)$.

Zentraler Baustein unseres Simplifiers ist die Simplifikation flacher Formeln, d. h. die Simplifikation einer Konjunktion bzw. einer Disjunktion von (simplifizierten) atomaren Formeln. Wir erweitern unseren Ansatz derart, daß wir eine *Theorie* zulassen. Dies ist eine Menge atomarer Formeln, die als gültig angenommen werden.

Die erste Strategie zur Simplifikation flacher Formeln ist es, atomare Formeln mit *fast identischen* Polynomen zu verschmelzen. Zwei Polynome heißen dabei fast identisch,

wenn sie nach der Normierung des höchsten Koeffizienten auf 1 sich nur im absoluten Glied unterscheiden. Zum Beispiel vereinfachen wir $2x+1 > 0 \wedge 3x+1 > 0$ zu $3x+1 > 0$. Die zweite Strategie benutzt Gröbnerbasen, um Gleichungsmengen als widersprüchlich zu erkennen. Wir können darüberhinaus die Gleichungsmengen durch äquivalente Gleichungsmengen ersetzen und alle anderen involvierten Terme weiter normieren. Wir erkennen z. B. die Widersprüchlichkeit der Formel $x + y = 0 \wedge y + z = 0 \wedge x + z \neq 0$.

Die Simplifikation geschachtelter Formeln basiert auf der Simplifikation flacher Formeln bezüglich einer Theorie. Die zentrale Idee ist es dabei, eine *implizite Theorie* während des rekursiven Traversierens der Formel aufzubauen, und alle Simplifikationen bezüglich dieser Theorie durchzuführen. Die Simplifikation einer Konjunktion $\alpha \wedge \varphi$ mit α atomar bzgl. einer Theorie Θ wird auf die Simplifikation von φ bzgl. der Theorie $\Theta \cup \{\alpha\}$ zurückgeführt. Eine analoge Strategie wird bei der Simplifikation einer Disjunktion angewendet. Zur Vereinfachung quantifizierter Formeln betrachten wir zwei Strategien, die den Grad der gebundenen Variablen mittels einer Variablensubstitution bzw. mittels der Wu–Ritt-Reduktion senken.

3 Quantorenelimination mittels virtueller Substitution

In diesem Kapitel wird die Quantorenelimination mittels virtueller Substitution [Wei88, LW93] erstmalig nach algorithmischen und softwaretechnischen Gesichtspunkten analysiert und gegliedert. Hierbei bilden sich vier Hauptphasen des Verfahrens heraus.

Bevor wir diese vier Phasen nennen, wollen wir in groben Zügen das Verfahren skizzieren und dann auf neue Optimierungen eingehen. Unsere Optimierungsziele sind dabei die Größe bzw. die „Einfachheit“ der Ergebnisformel und die tatsächliche Laufzeit des Verfahrens. Dabei beruht die Beschleunigung des Verfahrens darauf, daß unsere Optimierungen zu einfacheren Zwischenergebnisse führen.

Wir betrachten o. B. d. A. eine Formel der Form

$$\varphi(\mathbf{u}) \equiv \exists x(\psi(\mathbf{u})), \quad \psi \text{ positiv, quantorenfrei,}$$

wobei eine Formel *positiv* heißt, falls sie die logische Negation „ \neg “ nicht enthält. Die Quantorenelimination mittels virtueller Substitution beruht darauf, einen Existenzquantor, der intuitiv als unendliche Disjunktion über alle reellen Zahlen gesehen werden kann, durch eine endliche Disjunktion, die ein formales Objekt darstellt, zu ersetzen.

Sei $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$. Die Erfüllungsmenge

$$S_{\mathbf{a}}^x(\psi) = \{c \in \mathbb{R} \mid \psi(\mathbf{a}, c)\} \subseteq \mathbb{R}.$$

ist eine disjunkte Vereinigung von möglicherweise entarteten Intervallen. Die Formel φ ist genau dann für die gegebenen Parameterwerte \mathbf{a} erfüllt, falls die Erfüllungsmenge von ψ mindestens ein nicht-leeres Intervall enthält.

Man beachte, daß die Anzahl, die Lage und der Typ der Intervalle vom konkret gewählten Punkt \mathbf{a} abhängen. Die zentrale Idee der Quantorenelimination mittels virtueller Substitution ist es, daß die möglichen Endpunkte der Intervalle dennoch uniform als Ausdrücke in

den Parametern beschrieben werden können. Sie sind nämlich im wesentlichen Nullstellen der linearen und quadratischen Polynome in x , die in den atomaren Formeln von ψ auftreten. Diese werden als *Lösungskandidaten* bezeichnet. Aus den Lösungskandidaten berechnen wir eine *Eliminationsmenge*. Dies ist eine endliche Menge von *Testtermen*. Ein Testterm ist ein Paar $(\gamma(\mathbf{u}), t(\mathbf{u}))$, wobei der *Guard* γ eine quantorenfreie Formel ist, und t ein *Nichtstandardterm* ist, d. h., t darf gewisse zusätzlich eingeführten Symbole enthalten. Ein Guard $\gamma(\mathbf{u})$ eines Testpunktes $t(\mathbf{u})$ garantiert, daß $t(\mathbf{a})$ für alle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ mit $\gamma(\mathbf{a})$ definiert ist. Als Ersatz für die Substitution definiert man eine *modifizierte* Substitution, die in atomaren Formeln Variablen durch Terme oder gewisse Nichtstandardterme ersetzt, und dabei quantorenfreie Formeln, die ausschließlich Standardterme enthalten, liefert. Die modifizierte Substitution ist eine Erweiterung der *virtuellen Substitution*, die dem Verfahren den Namen gegeben hat. Eliminationsmengen erfüllen die folgende Äquivalenz:

$$\exists x(\psi) \longleftrightarrow \bigvee_{(\gamma, t) \in E} \gamma \wedge \psi[x//t].$$

Die eingangs erwähnten Phasen des Verfahren sind die folgenden:

1. Berechne aus ψ die Menge A der darin enthaltenen atomaren Formeln.
2. Berechne aus A die Menge C der Lösungskandidaten.
3. Berechne aus C eine Eliminationsmenge E .
4. Substituiere die Terme in E in ψ , kombiniere die erhaltenen Teilergebnisse disjunktiv, und vereinfache abschließend die erhaltene Disjunktion.

Im folgenden skizzieren wir unsere ersten Optimierungen, die im wesentlichen die dritte Phase betreffen. Ein wichtiger Ansatz ist es, möglichst kleine Eliminationsmengen zu finden. Die schon bekannte Idee, daß man entweder nur untere oder nur obere Intervallgrenzen betrachten muß, haben wir verallgemeinert. Zunächst haben wir die Idee auch auf *reelle* Eliminationsmengen, d. h. Eliminationsmengen, die nur Standardterme enthalten, erweitert. Wir haben dann gezeigt, wie sich die Seitenauswahl auf Testpunkte aus quadratische Termen erweitern läßt.

Der Schrankentyp einer atomare Formel, hängt von ihrer Relationen und dem höchsten Koeffizienten des enthaltenen Polynoms ab. Ist dieser parameterfrei, so können wir den Schrankentyp bestimmen und dementsprechend eine Seitenauswahl treffen. Ist der höchste Koeffizient dagegen parametrisch, so muß der zugehörige Testpunkt auf alle Fälle betrachtet werden. Jedoch kann nach der Seitenauswahl der Guard, eines aus einer solchen atomaren Formel bestimmten Testpunkts, um eine Vorzeichenbedingung über den höchsten Koeffizienten erweitert werden. Diese Bedingung erlaubt insbesondere eine Optimierung der modifizierten Substitution in der vierten Phase der Elimination.

Für den Spezialfall, daß die Formel nur eine einzige quadratische Ordnungsungleichung enthält, haben wir eine Alternative zur normalen Eliminationsmengenberechnung eingeführt. Dabei berechnen wir ausschließlich lineare Terme, so daß bei der modifizierten Substitution die Grade der Parameter, die ja möglicherweise von weiter außen quantifiziert werden, nicht ansteigen.

4 Strukturelle Eliminationsmengen

In diesem Kapitel skizzieren wir Optimierungen der ersten beiden Phasen der Quantorenelimination mittels virtueller Substitution. Ziel dieser Ansätze ist es, kleine Eliminationsmengen zu berechnen.

Wir betrachten analog zur Simplifikation das Konzept einer Theorie. Dabei unterscheiden wir drei Arten von Theorien: Die *explizite* Theorie wird vom Benutzer spezifiziert. Die *implizite* Theorie wird in der ersten Phase beim rekursiven Traversieren der Formel zu jeder atomaren Formel berechnet. Schließlich kann man dynamisch aufgrund des Verfahrensablaufs noch eine *unsichtbare* Theorie erzeugen.

Bei der Berechnung der Lösungskandidaten werden Annahmen über das Vorzeichen eines im allgemeinen parametrisch gegebenen Koeffizienten gemacht. Diese werden in die Ergebnisformel codiert, es sei denn, das Vorzeichen kann uniform entschieden werden. Die oben eingeführten Theorie schränken nun die Menge der zulässigen Belegungen der Parameter ein, so daß wir in einigen Fällen heuristisch das Vorzeichen entscheiden können. Dadurch wird die Berechnung der Lösungskandidaten verbessert: Einige Lösungskandidaten fallen weg, einige Guards werden einfacher und schließlich können wir den Schrankentyp in weiteren Fällen bestimmen. Zur Entscheidung der Vorzeichenannahmen verwenden wir eine Heuristik, die auf den in Kapitel 2 beschriebenen Simplifikationen beruht.

Ein weiter eingeführtes Konzept ist die verallgemeinerte Gausselimination. Betrachte die Formel

$$\exists x(z_1 x + z_0 = 0 \wedge \psi), \quad z_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad z_0 \in \mathbb{Z}.$$

Dann ist leicht zu sehen, daß unabhängig von der Belegung der Parameter die Zahl $-\frac{z_0}{z_1}$ der einzige erfüllende Punkt von $z_1 x + z_0 = 0 \wedge \psi$ ist [LW93].

Wir verallgemeinern dieses Konzept auf *Gaussformeln*. Dies sind Subformeln, von denen wir leicht algorithmisch eine endliche Obermenge L aller Lösungspunkte, uniform gegeben durch Terme in den Parametern, berechnen können. Gaussformeln sind nicht-triviale Gleichungen, Konjunktionen, die eine Gaussformel enthalten sowie Disjunktionen von Gaussformeln. Die Lösungskandidaten einer Gaussformel sind genau die Terme in L .

Ein ähnliches Resultat zeigen wir auch für nicht-triviale negierte Gleichungen, die unabhängig von der Parameterbelegung eine co-endliche Erfüllungsmenge besitzen. Dies führt zur Methode der *co-Gausselimination* und den *co-Gaussformeln*. Gaussformeln und co-Gaussformeln fassen wir als *Primkonstituenten* auf. Dies sind – möglicherweise komplexe – Subformeln unserer betrachteten Formel, die in der erste Phase der Elimination die Rolle der atomaren Formeln übernehmen.

5 Repeated Condensing

In diesem Kapitel führen wir *Condensing* als Ersatz der modifizieren Substitution in der vierten Phase der Elimination ein. Wir unterscheiden zwischen dem *Gauss-Condensing*

und dem *positionellen Condensing*. Bei beiden Ansätzen ist die grundlegende Idee gleich: Wir substituieren einen Term nicht in die Gesamtformel, sondern nur in Teile der Gesamtformel und löschen alle anderen Teile.

Gauss-Condensing nutzt wie die verallgemeinerte Gausselimination die Eigenschaft von Gaussformeln aus, eine endliche Erfüllungsmenge zu haben. Wir betrachten den Fall, daß unsere Eingabeformel $\exists x(\psi)$ eine Gaussformel ψ' als Primkonstituente enthält. In dieser Situation berechnen wir eine Eliminationsmenge $E = E_g \cup E'$, wobei E_g , alle Testpunkte, die aus ψ' generiert werden, enthält. Bei der Substitution der Testpunkte aus E' ersetzen wir zunächst in ψ die Gaussformel ψ' durch „false“ und wenden erst dann die übliche modifizierte Substitution an. Idee ist, daß alle Parameterbelegungen, für die ψ' gilt, durch Testpunkte in E_g abgedeckt werden. Testpunkte in E' sind also nicht relevant, wenn ψ' gilt, und somit ist das Löschen von ψ' korrekt.

Im Gegensatz zum Gauss-Condensing, bei dem wir die Eigenschaften einer speziellen Primkonstituente ausnutzen, beruht das positionelle Condensing auf der Position einer Subformel ψ' innerhalb der betrachteten Formel ψ . Wir können Formeln auch als Bäume betrachten, deren innere Knoten mit den booleschen Operatoren und deren Blätter mit atomaren Formeln bzw. Primkonstituenten markiert sind. Betrachten wir nun einen Testpunkt, der aus ψ' berechnet wurde und den Pfad P von der Wurzel des Baums, der ψ repräsentiert, bis zur Subformel ψ' . Beim positionellen Condensing löschen wir nun alle Subformeln, die an mit „ \vee “ markierten Knoten auf P liegen aber nicht zu P gehören und substituieren nur in die restliche Formel. Die Idee dabei ist es, daß die gelöschten Teile unabhängig vom betrachteten Testpunkt sind und sie nur durch die Substitution anderer Testpunkte zum Endergebnis beitragen.

6 Lokale Quantorenelimination

Bei der *lokalen Quantorenelimination* unterscheiden wir zwischen nicht-lokalen Parametern u_1, \dots, u_n und *lokalen Parametern* v_1, \dots, v_m . Zu den lokalen Parametern spezifizieren wir einen *betrachteten Punkt* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. Zu φ und \mathbf{a} berechnet die lokale Quantorenelimination eine Theorie Θ , die atomare Formeln in den lokalen Parameter enthält, und eine quantorenfreie Formel φ' , so daß

$$\bigwedge \Theta \longrightarrow (\varphi \longleftrightarrow \varphi') \quad \text{und} \quad \bigwedge \Theta(a_1, \dots, a_n).$$

Bei der *eingeschränkten* lokalen Quantorenelimination fordern wir zusätzlich, daß die berechnete Theorie Θ keine Gleichungen enthält. Dies impliziert dann, daß Θ für alle Punkte einer Umgebung von \mathbf{a} gültig ist.

Am Beispiel der Quantorenelimination mittels virtueller Substitution zeigen wir, wie man die Spezifikation der lokalen Quantorenelimination zu weiteren Optimierungen des Verfahrens benutzen kann. Zentrale Idee ist es, die Theorie Θ während der Berechnung von φ' zu erzeugen. Atomare Formeln werden immer dann zu Θ hinzugefügt, wenn dadurch

Optimierungen gegenüber der regulären Quantorenelimination möglich werden. Wir betrachten z. B. die Formel

$$\varphi(b, m) \equiv \exists x (mx + b > 0 \wedge x < 0),$$

in dem nicht-lokalen Parameter b und dem lokalen Parameter m . Für m spezifizieren wir den betrachteten Punkt 1. Reguläre Quantorenelimination berechnet zu φ das quantorenfreie Äquivalent

$$m < 0 \vee (m = 0 \wedge b > 0) \vee (m \neq 0 \wedge -bm < 0).$$

Unsere lokale Quantorenelimination berechnet die Formel $b > 0$ zusammen mit der Theorie $\{m > 0\}$. In diesem Beispiel fügen wir bei der Berechnung des Lösungskandidaten $-\frac{b}{m}$ die Annahme $m > 0$ zur Theorie, hinzu und müssen daher weder den Spezialfall $m = 0$ noch den Fall $m < 0$ behandeln. Diese Idee haben wir auf den allgemeinen Fall der Berechnung eines Lösungskandidaten erweitert.

Ähnliche Strategien haben wir auch für die Optimierung der modifizierten Substitution und der Simplifikation entwickelt.

7 Scheduling mittels Quantorenelimination

Wir betrachten optimales Scheduling, d. h. wir suchen Schedules, die bezüglich einer *Zielfunktion* optimal sind. Dazu benutzen wir die *erweiterte* Quantorenelimination [Wei94a]. Diese berechnet zu einer rein existentiell quantifizierten Formel nicht nur das quantorenfreie Äquivalent sondern auch eine erfüllende Beispiellösung für die quantifizierten Variablen. Quantorenelimination mittels virtueller Substitution kann leicht zu einer erweiterten Quantorenelimination modifiziert werden. Somit sind also alle Optimierungen, die wir in den vorherigen Kapiteln besprochen haben, auch Optimierungen der erweiterten Quantorenelimination.

Unser Lösungsansatz gliedert sich in drei Phasen: Zunächst formulieren wir das gegebene Schedulingproblem als existentielle Formel erster Stufe. Dann berechnen wir ein quantorenfreies Äquivalent und eine erfüllende Belegung mittels erweiterter Quantorenelimination. Schließlich extrahieren wir aus diesen Informationen den optimalen Wert der Zielfunktion und einen optimalen Schedule.

Wir können mit unserem Ansatz unter anderem Schedulingprobleme formulieren, die im übliche *Mehrmaschinenmodell* [Pin95] mit festzugeordneten Maschinen gegeben sind. Alle gebräuchlichen – auch nicht-reguläre – Zielfunktionen, viele zusätzliche Einschränkungen der zulässigen Schedules und allgemeine Ordnungsbeziehungen der Jobs lassen sich dabei mit unserem Ansatz behandeln. Dies sind wesentliche Einschränkungen der traditionellen Verfahren zum Lösen von Schedulingproblemen. Ebenfalls können wir Schedulingprobleme, die als Projektnetzwerke [Bar86] gegeben sind, formulieren. Im Fall einer rein existentiellen Formel, wie sie bei der Formulierung von Schedulingproblemen auftritt, ist

die (erweiterte) Quantorenelimination mittels virtueller Substitution exponentiell und somit sind auch die traditionellen Algorithmen von der theoretischen worst-case Komplexität nicht besser als unser Ansatz.

Quantorenelimination als Scheduler Wir erweitern die Quantorenelimination mittels virtueller Substitution zu einem Scheduler, einem Algorithmus zum Lösen von Schedulingproblemen. Wir demonstrieren dies am Beispiel eines Schedulers zum Lösen von Problemen, die im Mehrmaschinenmodell formuliert werden. Eingabe unseres Algorithmus ist eine tabellenmäßige Beschreibung des Schedulingproblem. Aus dieser wird dann unter anderem eine entsprechende Eingabeformel für die Quantorenelimination generiert. Wir erlauben es uns jedoch, während der Quantorenelimination sowohl auf diese Daten zurückzugreifen, als auch sie zu modifizieren. Dies können wir in vielfältigerweise zur Optimierung des Verfahrensablaufs benutzen. Zentrale Idee ist es hierbei, obere und untere Schranken für den Zielfunktionswert zu finden, sowie die Transitivität der partielle Ordnung auf den Jobs auszunutzen.

Verspätungsmanagement von Eisenbahnen Wir formulieren ein komplexes Schedulingproblem als Formel erster Stufe, das sich mit den bis jetzt eingeführten Modellen nicht fassen läßt. Wir zeigen wie es sich dann mittels erweiterter Quantorenelimination lösen läßt. Bereits die Formulierung als Formel erster Stufe ist ein theoretisches Resultat, da sie erstmalig eine formale Spezifikation des Problems bietet.

Wir betrachten ein Eisenbahnnetz und machen die folgenden Annahmen: Züge verkehren zwischen Städten auf festgelegten Verbindungen. Sie fahren nach einem im voraus festgelegten Fahrplan. Passagiere benutzen Verbindungen, um von einer Station zu einer anderen zu reisen. Kommt ein Zug verspätet in einer Station an, so können unter Umständen manche Passagiere ihre Anschlußzüge nicht erreichen. Die Bahngesellschaft hat dann zwei Möglichkeiten, die Beförderung des Reisenden dennoch zu gewährleisten: Sie kann alternative Verbindungen angeben und sie kann Anschlußzüge in Stationen warten lassen. Letzteres verursacht wiederum Verspätungen anderer Züge, die ebenfalls betrachtet werden müssen.

Wir können diese Situation als Formel erster Stufe modellieren und mittels erweiterter Quantorenelimination lösen: Zu einer gegebenen Verspätungssituation können wir die zusätzliche Wartezeiten aller Züge sowie alle notwendigen Alternativverbindungen so berechnen, daß die durchschnittliche Verspätung aller Reisenden minimal ist.

8 REDLOG

Um die hier diskutierten Verfahren zu implementieren und anzuwenden hat der Autor zusammen mit Sturm das REDUCE Paket REDLOG entworfen [DS97]. REDLOG erweitert das Computeralgebrasystem REDUCE zu einem *Computerlogiksystem*. Analog zu den vorhandenen Funktionen von REDUCE stehen dem Benutzer eine Vielzahl von Funktionen zur

Eingabe, Verarbeitung und Analyse von Formeln erster Stufe zur Verfügung. Dabei ist es nicht auf den hier diskutierten reellen Kontext beschränkt, sondern beinhaltet etwa auch ähnliche Verfahren für algebraisch-abgeschlossene und diskret-bewertete Körper.

REDLOG ist in der aktuell vertriebenen Version 3.7 von REDUCE enthalten. Viele der in dieser Arbeit beschriebenen Optimierungen der Quantorenelimination mittels virtueller Substitution sind in der publizierten Version integriert. Andere Optimierungen haben ihr enormes Potential in Testimplementierungen bewiesen.

9 Zusammenfassung

Virtuelle Substitution ist nicht zuletzt durch die Optimierungen, die in dieser Arbeit diskutiert wurden, einer der bedeutenden Quantoreneliminationsverfahren für lineare und quadratische Formeln.

Eine exakte Analyse des Verfahrens nach algorithmischen und softwaretechnischen Gesichtspunkten in Kapitel 3 zeigt eine klare Gliederung des Verfahrens in vier Phasen. Diese exakte Analyse ermöglicht es erstmals die bisher eher unsystematischen Optimierungen in ein Schema zu bringen. Dies erlaubt es uns, sie weitreichend zu verallgemeinern. Die Analyse des Zusammenwirkens der Phasen führt zu einer neuen Optimierung, die einen Zusammenhang zwischen der Seitenauswahl und der virtueller Substitution erstmalig zeigt und verwendet.

In Kapitel 4 zeigen wir Methoden auf, um die Größe der berechneten Eliminationsmengen drastisch zu verkleinern. Dazu verwenden wir zum einen eine Theorie, die gültige Annahmen über die Parameter zusammenfaßt. Zum anderen nutzen wir die Eigenheiten von Gleichungen und negierten Gleichungen aus, um bereits die Anzahl der Kandidatenlösungen zu senken.

Das von uns in Kapitel 5 eingeführte Condensing löst die modifizierte Substitution in der vierten Phase ab. Eine sorgfältige Analyse des Zusammenwirkens der Substitutionsresultate erlaubt es hier, Teile der Formel in den einzelnen Substitutionschritten zu vernachlässigen. Dies führt bereits zu kleineren Formeln einer einfacheren Struktur. Schließlich werden ebenfalls in dieser Phase die Simplifikationsmethoden, die wir in Kapitel 2 eingeführt hatten, zur abschließenden Vereinfachung der Formel benutzt.

Alle Optimierungen zusammen führen im Vergleich zum naiven Verfahren, wie es von Weispfenning eingeführt wurde, zu wesentlich einfacheren Ergebnisformeln, die darüber hinaus sehr viel schneller berechnet werden.

Unsere Definition der lokalen Quantorenelimination, die in Kapitel 6 eingeführt wurde, erlaubt es das Verfahren weiter zu optimieren, ohne die Anwendbarkeit der Quantorenelimination allzusehr einzuschränken.

Abschließend zeigen wir, daß Quantorenelimination mittels virtueller Substitution einen sehr flexiblen Ansatz zum Lösen von Schedulingproblemen bietet. Wir demonstrieren unseren Ansatz am Beispiel des Mehrmaschinenmodells, der Projektnetzwerke und der Formulierung des Verspätungsmanagements. Wir führen Optimierungen der Quantorenelimi-

nation ein, die Informationen über die konkrete Problemstellung benutzen. Diese Optimierungen zeigen insbesondere, welche Möglichkeiten in der Quantorenelimination mittels virtueller Substitution stecken, wenn man sie zu einem problemspezifischen Solver erweitert.

Literaturverzeichnis

- [Bar86] Bartusch, M.: Optimierung von Netzplänen mit Anordnungsbeziehungen bei knappen Betriebsmitteln. Technical Report MIP-8618, FMI, Universität Passau, D-94030 Passau, Germany, 1986. Nachdruck der Dissertation, RWTH Aachen, 1983.
- [Dol00] Dolzmann, A.: Algorithmic Strategies for Applicable Real Quantifier Elimination. Dissertation, Department of Mathematics and Computer Science. University of Passau, Germany, D-94030 Passau, Germany, März 2000.
- [DS97] Dolzmann, A.; Sturm, T.: Redlog: Computer Algebra Meets Computer Logic. In ACM SIGSAM Bulletin, Bd. 31 (2):(1997), S. 2–9.
- [DS99] Dolzmann, A.; Sturm, T.: Redlog User Manual. Technical Report MIP-9905, FMI, Universität Passau, D-94030 Passau, Germany, Apr. 1999. Edition 2.0 for Version 2.0.
- [LW93] Loos, R.; Weispfenning, V.: Applying Linear Quantifier Elimination. In The Computer Journal, Bd. 36 (5):(1993), S. 450–462. Special issue on computational quantifier elimination.
- [Pin95] Pinedo, M.: Scheduling: Theory, algorithms, and systems. Prentice Hall international series in industrial and system engineering. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
- [Wei88] Weispfenning, V.: The Complexity of Linear Problems in Fields. In Journal of Symbolic Computation, Bd. 5 (1&2):(1988), S. 3–27.
- [Wei94a] Weispfenning, V.: Parametric Linear and Quadratic Optimization by Elimination. Technical Report MIP-9404, FMI, Universität Passau, D-94030 Passau, Germany, Apr. 1994.
- [Wei94b] Weispfenning, V.: Quantifier elimination for real algebra—the cubic case. In Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC 94). ACM Press, New York, 1994, Oxford, England, Juli 1994, S. 258–263.
- [Wei97] Weispfenning, V.: Quantifier elimination for real algebra—the quadratic case and beyond. In Applicable Algebra in Engineering Communication and Computing, Bd. 8 (2):(1997), S. 85–101.

Andreas Dolzmann, geboren am 11. September 1967 in Bonn schloß den Besuch des Gymnasiums mit dem Abitur 1988 ab. Er studierte an der Universität Passau Informatik mit Nebenfach Mathematik und erhielt dort 1995 das Diplom in Informatik mit Auszeichnung. Von der Fakultät für Mathematik und Informatik wurde ihm der Doktor rer. nat. 2001 mit summa cum laude verliehen. Seitdem arbeitet er in Passau als wissenschaftlicher Assistent und forscht im Bereich des symbolischen Rechnens mit Schwerpunkt auf Entwurf, Design, Implementierung und Anwendung von Quantoreneliminationsverfahren.