Optimale Suche bei unsicherem Wissen über die Suchobjekte

Wolfgang H. Janko
Wirtschaftsuniversität Wien

1 Einleitung

Fragen des optimalen Informationsstandes sind bei Entscheidungsproblemen unter Unsicherheit ein wichtiges Thema. Dies gilt sowohl für Probleme der Ökonomie (Arbeitsplatzsuche, Produktsuche, Investitionsmöglichkeitssuche u.a.m.) als auch der Informatik (Information Retrieval, Algorithmenwahl u.a.m.). Durch das zunehmende Informationsangebot auf fast allen Gebieten, kommt der wirtschaftlichen Informationsbeschaffung immer höhere Bedeutung zu. Numerisch rechenbare Modelle sind nur in einfachen Fällen vorhanden. Vorliegender Beitrag beschreibt ein Modell zur optimalen Suche und Evaluation bei bekannter Verteilung des Such- und Evaluationsertrages und bekannten Kosten anhand von Fallbeispielen.

2 Das Grundmodell der Entscheidungstheorie

In der Beschreibung der Entscheidungssituation gehen wir vom "State Preference Model" aus, welches heute in der ökonomischen Literatur verbreitet ist (vgl. z.B. [Fe75]).

3 Ein sequentielles Modell zur Suche und Prüfung von Handlungsalternativen

3.1 Einführung

ln der Folge soll auf Modelle eingegangen werden, die mehr als eine Komponente in der Entscheidungsfindung berücksichtigen und so die Realität in verbesserter Weise widerspiegeln. So ist beispielsweise für den Kauf eines Produktes im allgemeinen nicht allein der Preis ausschlaggebend, sondern es spielen andere Faktoren eine Rolle, wie die Qualität des Produktes oder der Kundendienst des Herstellers. Besonders soll hier auf ein Modell eingegangen werden, das erstmals von MacQueen [M64] vorgestellt wurde, und für das analytische und numerische Ergebnisse bei der Verwendung einer Multinormalverteilung sowie der rechnerisch einfacher zu handhabenden diskreten Multinominalverteilung vorliegen. In diesem Modell kann unter zusätzlichen Kosten eine Verbesserung des Kenntnisstandes über den Wert einer Alternative durch Einholen von Zusatzinformation erreicht werden. Es besitzen der zuerst beobachtete Wert (Suchvariable), der nach einem Test beobachtete Wert (Testvariable) und der wahre Wert der Alternative eine gemeinsame Verteilung. MacQueen löst dieses Modell bei mehreren Annahmen, auf die in den folgenden Abschnitten noch näher eingegangen wird. (Ein Ansatz zu einem verwandten Problem stammt von Marschak und Yahav [MY66] und Stewart [St81]. Beide Modelle können numerische Probleme nicht exakt lösen).

3.2 Problemstellung

In einem sequentiellen Entscheidungsproblem mit einer unbeschränkten Anzahl von Alternativen soll der Auswahlprozeß dann gestoppt werden, wenn die vorliegende Alternative einen möglichst hohen Wert erwarten läßt. Der Entscheider beobachtet zu jeder Alternative den Wert x (also die Realisation) einer Zufallsvariablen X, von der er auf den Wert u der Zufallsvariablen U, d.i. der "wahre" Wert dieser Alternative, schließen kann. Diese Beobachtung verursache Beobachtungskosten (d.s. Suchkosten) von c_s.
Daraufhin kann er entweder:

1. diese Alternative akzeptieren und keine weiteren Werte mehr beobachten. Sein erwarteter Ertrag ist dann $E(U/X = x)$. Er kann aber auch
2. die vorliegende Alternative verwerfen und eine neue Alternative (wieder mit Suchkosten c_s) suchen und X beobachten. Zudem hat er noch die Möglichkeit,
3. mehr Information über den Wert der Alternative durch Testen derselben einzuholen, indem er eine zweite Zufallsvariable Y beobachtet, die ihm eine verbesserte Information über den wahren Wert (d.i. die Zufallsvariable U) zu den Testkosten c_t liefert. Die zweite Beobachtung - ein Test der Alternative - liefert erwarteten Ertrag von $E(U/X, Y)$.

Ein Rückgriff auf bereits verworfene Alternativen ist möglich, kommt jedoch nicht vor. Gesucht ist eine optimale stationäre Politik für diesen Entscheidungsprozeß, die nur von den beobachteten Werten der Zufallsvariablen X und Y abhängt. Das heißt, für jeden dieser Werte soll die Aktion (Entscheidung) angegeben werden, für die $E(U/X, Y)$ maximiert wird. Abbildung 1 veranschaulicht den Entscheidungsprozeß. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X, Y und U soll bekannt sein. Mit $Z = E(U/X = x, Y)$ bezeichnen wir die Zufallsvariable, die in Abhängigkeit von Y den bedingten Erwartungswert von U darstellt, nachdem der Wert x beobachtet wurde. Die Verteilung von Z entspricht der von Y. Es kann gezeigt werden, daß auf einige Bedingungen, die von MacQueen angegeben wurden, verzichtet werden kann, und daß im wesentlichen folgende Bedingungen als Voraussetzung genügen:

1. Die Zufallsvariablen X, Y und U besitzen eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte $h(x, y, u)$.

2. Der Erwartungswert $E(U)$ existiert und ist endlich.
3. $dF(z/x)/dx < O$, d.h., die Verteilung $F(z/x)$ ist stochastisch geordnet auf X. Dann gilt nämlich für $x_1 < x_2$, daß $F(z/x_1) > F(z/x_2)$ wahr ist.

Sei v der erwartete Erfolg, falls verworfen wird und dann nach der optimalen Strategie vorgegangen wird. Nachdem der x-Wert einer Alternative ermittelt wurde, sind die erwarteten Erträge

$$\begin{array}{rl} v & \text{für Verwerfen} \\ E(U|X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} zf(z|x)dz =: R(x) & \text{für Annehmen und Stoppen ohne Testen} \\ vF(v|x) + \int_{v}^{+\infty} zf(z|x)dz - c_t =: T(v,x) & \text{für Testen und optimales Fortfahren} \end{array}$$

Das Maximum dieser drei erwarteten Erträge legt bei bekanntem v die optimale weitere Vorgehensweise fest.

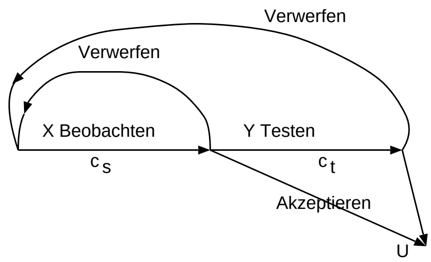

Abbildung 1: Der Such- und Testprozeß

Unter Voraussetzung 3) ist $R(x)$ monoton wachsend in $(-\infty, +\infty)$. Für das weitere Vorgehen erweist es sich als zweckmäßig, die zu X äquivalente Zufallsvariable R einzuführen, die jeder Alternative den Wert $r = R(x)$ zuordnet. $x(r)$ ergibt sich dann aus der Beziehung $r = R(x(r))$, weiterhin seien $F(r) := F(X(R)) = P(R \leq r), F(z|r) := F(z|x(R)) = P(Z \leq z|R = r)$ und $f(r)$ und $f(z|r)$ seien die zugehörigen Dichtefunktionen. Der erwartete Ertrag für Testen und optimales Fortfahren ergibt sich dann zu

$$T(v,r) = vF(v|r) + \int_{v}^{+\infty} zf(z|f)dz - c_t \tag{1}$$

MacQueen zeigt, daß $T(v,r)$ monoton wächst mit $0 < \delta T(v,r)/\delta r < 1$, sodaß bei festem v_0 die Gleichungen

$$T(v,r) = v \tag{2}$$
$$T(v,r) = r \tag{3}$$

jeweils höchstens eine Lösung (r_V, r_A) besitzen (siehe Abbildung 2).

Zur Lösung des Modells betrachtet man zunächst den erwarteten Ertrag einer Suchpolitik

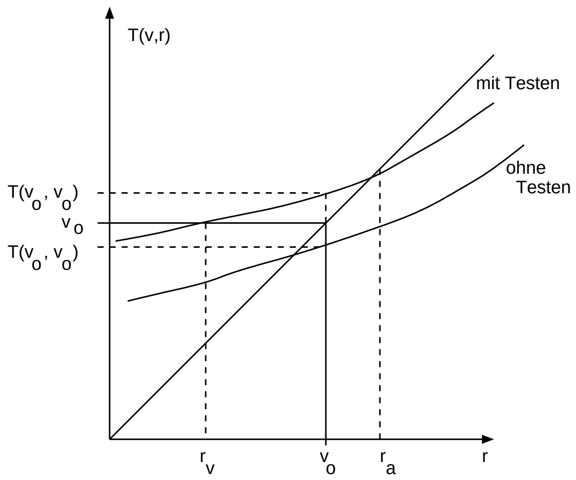

Abbildung 2: Die möglichen Verläufe von $T(v, r)$

ohne zu testen. Dieser ergibt sich als Lösung von

$$v = vF(v) + \int_{v}^{+\infty} rf(r)dr - c_s \tag{4}$$

Da die Gleichung unter den üblichen Voraussetzungen [De70] genau eine Lösung v_0 besitzt, und da in einer optimalen Politik nur dann getestet wird, wenn $T(v_0, v_0) < v_0$ ist, sind nur zwei mögliche Verläufe von $T(v_0, r)$ zu unterscheiden (vgl. Abbildung 2): $T(v_0, v_0) > v_0$ und $T(v_0, v_0) \leq v_0$. Nehmen wir an, daß in einer optimalen Politik getestet werde. Dann kann man wie in Abbildung 2 graphisch die Ermittlung der optimalen Politik anschaulich darstellen. MacQueen zeigt unter der Annahme, daß die Mittelwerte der Randverteilungen der Variablen der gemeinsamen Verteilung folgen, die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Unter der Voraussetzung, daß die Gleichungen (2) und (3) eine Lösung besitzen, gibt es höchstens ein Tripel (r_V, v^*, r_A), das gleichzeitig die Gleichungen

$$v = vF(r_V) + \int_{r_V}^{r_A} T(v, r)f(r)dr + \int_{r_A}^{+\infty} rf(r)dr - c_s \tag{5}$$

$$T(v, r_V) = v \tag{6}$$

$$T(v, r_A) = r_A \tag{7}$$

erfüllt.

Gleichung 5 stellt den erwarteten Ertrag der Politik dar, wenn für alle Werte von r kleiner gleich r_V verworfen wird, innerhalb der Grenzen des Intervalls (r_V, r_A) getestet wird und für alle r größer oder gleich r_A bei Suchkosten c_s akzeptiert wird.

3.3 Beispiel

Eine optimale Politik kann somit folgendermaßen bestimmt werden:

1. Bestimme v_0 als Lösung von Gleichung (4).
2. $T(v_0, v_0) < v_0$: (nie testen)
   $v^* = v_0$, Verwerfe falls $x < x^*, x^* = R^{-1}(v_0)$
3. $T(v_0, v_0) \geq v_0$:
   Bestimme (r_V, v^*, r_A) als Lösung des Gleichungssystems (5), (6), und (7). Verwerfe falls $x < x^*, x^* = R^{-1}(r_V)$, akzeptiere falls $x < y^*, y^* = R^{-1}(r_A)$ Anderenfalls teste, bestimme $E(U|X = x, Y =<)$ und akzeptiere falls $E(U|X = x, Y = y) > v^*$

Um diese Berechungsschritte numerisch zu illustrieren, wollen wir ein Beispiel bei Verwendung diskret verteilter Zufallsvariablen aus [JH85] vorstellen[1]. Die Tabellen 1 bis 6 zeigen die wesentlichen Berechnungsschritte zur Bestimmung der optimalen Politik, Abbildung 5 veranschaulicht den Verlauf von $T(v, r)$ für diskrete Werte von r. Der durch Vergleich von v_0 mit $T(v_0, r)$ und r resultierende Wert der Politik $v^{(1)}$ stellt in diesem Beispiel bereits den erwarteten Wert der optimalen Politik $v^*(= v^{(1)})$ dar, da sich Akzeptanz-, Test- und Ablehnungsbereich für $v^{(1)}$ nicht ändern.

x, y, u	$f(x, y, u)$
1,1,1	0.1
1,1,2	0.05
1,2,2	0.04
1,2,3	0.01
2,2,1	0.05
2,2,2	0.15
2,3,2	0.05
2,3,3	0.05
3,2,2	0.05
3,2,3	0.05
3,3,3	0.15
4,2,3	0.06
4,2,4	0.02
4,4,3	0.02
4,4,4	0.1

Tabelle 1: Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen X, Y, U

x, y	$f(u/x, y)$	
1,1	2/3	u=1
	1/3	u=2
1,2	4/5	u=2
	1/5	u=3
2,2	1/4	u=1
	3/4	u=2
2,3	1/2	u=2
	1/2	u=3
3,2	1/2	u=2
	1/2	u=3
3,3	1/4	u=2
	3/4	u=3
4,2	3/4	u=3
	1/4	u=4
4,4	1/6	u=3
	5/6	u=4

Tabelle 2: Die bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(u|x, y)$

[1]Allerdings kann bei diskreten Verteilungen eine mehrfache Politikverbesserung erforderlich sein, bis schließlich das Tripel (r_V, v^*, r_A) endgültig feststeht.

x	$E(U\|X=x,y)$		$R(x)$
1	4/3	y=1	31/20
	11/5	y=2	
2	7/4	y=2	2
	5/2	y=3	
3	5/2	y=2	8/3
	11/4	y=3	
4	13/4	y=2	36/10
	23/6	y=4	

<u>Tabelle 3:</u> Der bedingte Erwartungswert $E(U|X,Y)$ und der erwartete Ertrag $R(x)$ bei Akzeptieren

x	r	$f(r)$	$f(z/r)$		$F(z/r)$	
1	31/20	2/10	3/4	z= 4/3	0	z<4/3
			1/4	z=11/5	3/4	4/3≤z<11/5
					1	z≥11/5
2	2	3/10	2/3	z= 7/4	0	z<7/4
			1/3	z= 5/2	2/3	7/4≤z<5/2
					1	z≥5/2
3	8/3	3/10	1/3	z= 5/2	0	z<5/2
			2/3	z=11/4	1/3	5/2≤z<11/4
					1	z≥11/4
4	36/10	2/10	4/10	z=13/4	0	z<13/4
			6/10	z=23/6	4/10	13/4≤z<23/6
					1	z≥23/6

<u>Tabelle 4:</u> Die bedingte Verteilung von Z und die Randverteilung von R

r	$T(v,r)$	
31/20	29/20	v<4/3
	3/4 v + 9/20	4/3≤v<11/5
	v-1/10	v≥11/5
2	19/10	v<7/4
	2/3 v + 11/15	7/4≤v<5/2
	v-1/10	v≤5/2
8/3	77/30	v<5/2
	1/3v + 26/15	5/2≤v<11/4
	v-1/10	v≥11/4
36/10	7/2	v<13/4
	4/10 v + 22/10	13/4≤v<23/6
	v-1/10	v≥23/6

<u>Tabelle 5:</u> Erwarteter Ertrag beim Testen

x_0	r	v_0	$T(v_0, r)$	Anfangspolitik	$v^{(1)}$	$T(v^{(1)}, r)$	optimale Politik
1	1.55	2.04	1.98	VERWERFEN	2.067	2	VERWERFEN
2	2	2.04	2.09	TESTEN	2.067	2.111	TESTEN
3	2.67	2.04	2.567	AKZEPTIEREN	2.067	2.567	AKZEPTIEREN
4	3.6	2.04	3.5	AKZEPTIEREN	2.067	3.5	AKZEPTIEREN

Tabelle 6: Bestimmung der Anfangspolitik und der optimalen Politik

4 Bisherige Arbeiten und Zusammenfassung

Vorgestelltes Modell ist erweiterbar auf eine $n + 1$ dimensionale Verteilung mit $(n - 1)$ Testmöglichkeiten und Suche (s. Anhang). Über die Diskretisierung kann auch für stetige Verteilung relativ effizient eine optimale Politik ermittelt werden, indem die Verteilung diskret approximiert wird und aus der resultierenden Multinominalverteilung eine optimale Politik ermittelt wird [Ti85]. In der Informatik wurde obiger Ansatz in der Ermittlung optimaler Startpunkte in hierarchischen Hypermediasystemen basierend auf einem Ansatz von [FC89] erfolgreich angewandt. Die Erweiterung des Ansatzes von [KL79] und [KW81] erscheint mit diesem Modell ebenso leicht möglich. Bei mehr als einem Test ist es bisher nicht gelungen, Kriterien für eine optimale Testreihenfolge anzugeben, ohne die Werte für alle Tests permutiert zu ermitteln. Ist bei einer diskreten Verteilung $W(X_1, X_2, ..., X_k)$ die Anzahl der Wertausprägungen vom Umfang n, so ist die Rechenkomplexität zur Ermittlung des optimalen Wertes einer Politik bei vorgegebener Testreihenfolge von der Größe $O(n^k)$. Die Zeitkomplexität der Ermittlung der optimalen Politik ist dann ca. $O(k^k n^k)$. Eine Erweiterung des Verfahrens um einen lernenden Ansatz, der bei wiederholter Verwendung derselben Verteilung diese erlernt und ihren Änderungen in der Zeit eventuell folgt, wurde erst in der Informatik an einer Suchfragestellung - ohne Testen - erfolgreich von [Ga84] unter Verwendung eines minimalen randomisierten Suchalgorithmus von [Ja76] versucht.

Insgesamt erscheint vorliegende Erweiterung des entscheidungstheoretischen Ansatzes in vielen Fällen in der Ökonomie und in der Informatik einsetzbar. Als größte Schwierigkeit erweist sich die Angabe geeigneter Wahrscheinlichkeitsverteilungen $W(X_1, X_2, ..., X_n)$ wenn ein derartiger stochastischer Zusammenhang vorliegt.

5 Anhang: Politik mit 3-fachem Testen

						KOSTENSTRUKTUR
	BEOBACHTUNG					KOSTET $C_0 = 0.04$
		1. TEST				KOSTET $C_1 = 0.01$
			2. TEST			KOSTET $C_2 = 0.01$
				3. TEST		KOSTET $C_3 = 0.01$
x_1					AKTION	RW (AKTION)
x_0	-1				VERWERFEN	0.40
x_0	-2				1. TEST	0.60
x_1		-1			2. TEST	0.26
x_2			-1		VERWERFEN	0.11
x_2			-2		3. TEST	0.15
x_3				-1	VERWERFEN	0.06
x_3				-2	AKZEPTIEREN	0.09
x_1		-2			2. TEST	0.34
x_2			-1		3. TEST	0.15
x_3				-1	VERWERFEN	0.07
x_3				-2	AKZEPTIEREN	0.08
x_2			-2		AKZEPTIEREN	0.19

x_1	RW (AKTION)	EE (AKTION)
x_0	0.400	1.819
x_0	0.600	1.845
x_1	0.433	1.799
x_2	0.423	1.819
x_2	0.577	1.831
x_3	0.400	1.819
x_3	0.600	1.859
x_1	0.567	1.900
x_2	0.441	1.886
x_3	0.467	1.819
x_3	0.553	1.970
x_2	0.559	1.980

Tabelle 7: Optimale Politik

RW: R Wahrscheinlichkeit
BW: Bedingte Wahrscheinlichkeit
EE: Erwarteter Ertrag
v_0 = 1,6667 (Politik ohne Test)
v_3 = 1,8194 (Politik mit 3 Testmöglichkeiten)

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$W(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$
1	1	1	1	1	0.06
1	1	1	1	1	0.01
1	1	1	2	1	0.04
1	1	1	2	2	0.01
1	1	2	1	1	0.04
1	1	2	1	2	0.02
1	1	2	2	1	0.03
1	1	2	2	2	0.04
1	2	1	1	1	0.01
1	2	1	1	2	0.01
1	2	1	2	1	0.02
1	2	1	2	2	0.03
1	2	2	1	1	0.01
1	2	2	1	2	0.01
1	2	2	2	1	0.02
1	2	2	2	2	0.03
1	2	2	2	3	0.01
2	1	1	1	1	0.04
2	1	1	1	2	0.01
2	1	1	2	1	0.04
2	1	1	2	2	0.02
2	1	2	1	1	0.03
2	1	2	1	2	0.03
2	1	2	2	1	0.02
2	1	2	2	2	0.06
2	1	2	2	3	0.01
2	2	1	1	1	0.04
2	2	1	1	2	0.03
2	2	1	2	1	0.01
2	2	1	2	2	0.06
2	2	1	2	3	0.01
2	2	2	1	1	0.02
2	2	2	1	2	0.05
2	2	2	1	3	0.01
2	2	2	2	1	0.01
2	2	2	2	2	0.09
2	2	2	2	3	0.02

Tabelle 8: Verteilung

Literaturverzeichnis

[CRS71] Chow, Y.S., Robbins, H., Siegmund, D.: Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping, Houghton Mifflin Comp., Boston, 1971.

[De70] De Groot, M.H., Optimal Statistical Decisions, McGraw Hill, New York, 1970

[Fe75] Ferschl, F., Nutzen- und Entscheidungstheorie, Westdeutscher Verlag, Opladen, 1975.

[FC89] Frisse, M.E., Cousins, S.B.: Information Retrieval from Hypertext: Update on the Dynamical Medical Handbook Project, in (ACM Hrsg.): Hypertext 89 Proceedings, S. 199-212.

[Ga84] Gasber, R.: Untersuchung von adaptiven randomisierten Datenstrukturen, Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), Karlsruhe, 1984.

[Ja76] Janko, W.H.: Stochastische Modelle in Such- und Sortierprozessen, Forschungsergebnisse aus dem Revisionswesen und der betriebswirtschaftlichen Steuerlehre, Band 3, Duncker & Humblot, Berlin, 1976.

[JH85] Janko, W.H., Hartmann, J.: Flexible Informationsbeschaffung bei Alternativsuchproblemen, in: (Ballwieser, W., Berger, K.-H., Hrsg.) Information und Wirtschaftlichkeit, Gabler, Wiesbaden, 1985, S. 199-228.

[JTF91] Janko, W.H., Taudes, A., Faber, W.: Optimale Startpunkte zur Navigation in Hypermediasystemen - ein entscheidungstheoretischer Ansatz. In: (Maurer, H., Hrsg.) Hypertext/Hypermedia 91, Tagung der GI, SI und OCG, Graz 1991; S. 145-155

[KL79] Kraft, D.H., Lee, T., Stopping Rules and Their Effect on Expected Search Length, Information Processing and Management, Vol. 15, 1979

[KW81] Kraft, D.H., Waller, W.G., A Bayesian Approach to User Stopping Rules for Information Retrieval Systems, Information Processing and Management, Vol. 17, no. 6, 1981

[MY66] Marschak, T., Yahav, J.A.: A Sequential Selection of Approaches to a Task, Management Science, Serres A, Vol. 12, 1966.

[M64] McQueen, J.B., Optimal Policies for a Class of Search and Evaluation Problems, Management Science, Vol. 10, No.4, 1964.

[St81] Stewart, T.J.: Optimal Selection from a Random Sequence with Observation Errors, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 28, No. 3, 1981.

[Ti85] Timpe, T.: Implementierung und Anwendung eines Modells zur Alternativensuche mit Informationsbeschaffung bei diskret verteilten Erträgen, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (TH), Karlsruhe, 1985.