Die Eignung von Fuzzy-Modellen zur Lösung realer Entscheidungsprobleme

Heinrich J. Rommelfanger
Institut für Statistik und Mathematik
Fachbereich Wirtschaftswissenschaften
Goethe Universität Frankfurt am Main
Mertonstraße 17-23
D-60054 Frankfurt am Main
Rommelfanger@wiwi.uni-frankfurt.de

Abstract: Klassische Entscheidungsmodelle fordern eindeutig bestimmte Inputgrößen. Dieser hohe Anspruch an den Informationsstand eines Entscheidungsträgers ist in der Realität häufig nicht gegeben oder die Kosten zur Gewinnung dieser Informationen werden als zu hoch erachtet. Dies hat zur Folge, daß Entscheider auf die Unterstützung durch mathematische Modelle verzichten, da sie befürchten, dass das Entscheidungsmodell das Realproblem nicht ausreichend genau wiedergibt. Da die Fuzzy-Mengen-Theorie die Möglichkeit bietet, ungenaue und unvollständige Informationen mathematisch zu modellieren, wurde eine Vielzahl von Entscheidungsmodellen mit unterschiedlichen Fuzzy-Komponenten entwickelt. Diese Arbeit konzentriert sich auf Modelle mit Fuzzy-Nutzen oder Fuzzy-Wahrscheinlichkeiten, da nach Ansicht des Autors nur diese für die praktische Anwendung bedeutsam sind. Die Verwendung eines Fuzzy-Modells kann zur Folge haben, dass die absolut beste Alternative nicht direkt ermittelt werden kann. Aber es ist zumeist möglich, einen Großteil der Alternativen als nicht relevant zu erkennen und aus der weiteren Betrachtung auszuschließen. Zur Auswahl einer optimalen Alternativen können dann unter Abwägung von Kosten und Nutzen zusätzliche Informationen herangezogen werden.

1 Einleitung

CYERT und MARCH "Behavioral Theory of the Firm" [CM63] haben das für Entscheidungstheoretiker blamable Ergebnis erbracht, dass die von ihnen als Ausdruck eines rationalen Verhaltens angepriesenen Konzepte der normativen Entscheidungstheorie und der Spieltheorie in der Praxis weitgehend ignoriert werden. Diese Beobachtung wurde durch spätere empirische Untersuchungen über die praktische Anwendung von Operations Research Methoden bestätigt, vgl. [Li87], [Ti87], [Me89].

Diese Missachtung wissenschaftlicher Erkenntnisse durch die Praxis läßt sich im wesentlichen damit begründen, dass die Modelle der normativen Entscheidungstheorie von Voraussetzungen ausgehen, die in realen Problemen nicht erfüllt werden können. Um ein Entscheidungsproblem in Form eines klassischen Entscheidungsmodells im Sinne von v. NEUMANN/.MORGENSTERN [NM53] modellieren zu können, muß ein Entscheidungsträger (ET) in der Lage sein, die folgenden Angaben zu spezifizieren:

1. Die Menge der dem Entscheidungsträger zur Verfügung stehenden Aktionen (Alternativen, Entscheidungsvariablen, Strategien) $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$,

2. Die Menge der möglichen Umweltzustände (Szenarien) $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$,
3. Die Ergebnisfunktion, die jeder Aktion-Umweltzustand-Kombination ein Ergebnis (Resultat, Gewinn, etc.) zuordnet

   $$g_{ij} = g(a_i, s_j) \quad , i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n \, .$$

   G ist die Menge aller möglichen Ergebnisse g_{ij}.
4. Der Grad des Wissens über die Eintrittschancen jedes Umweltzustandes. Normalerweise wird unterstellt, dass nur unvollkommenes Wissen in Form einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(s_j)$ vorliegt.
5. Ein Kriterium zur Auswahl einer Aktion aus A. In der Literatur wird das BERNOULLI-Kriterium als Ausdruck eines rationalen Verhaltens empfohlen, d.h. es ist die Alternative a* auszuwählen, die den Erwartungsnutzen maximiert:

   $$E(a^*) = \underset{a_i \in A}{\mathrm{Max}}\, E(a_i) = \underset{a_i \in A}{\mathrm{Max}} \sum_{j=1}^{n} u(g(a_i, s_j)) \cdot p(s_j) \tag{1}$$

   Benötigt wird daher die Nutzenfunktion des Entscheiders $u : G \to \mathbf{R}$.
6. Die einzige Chance zur Verbesserung der Lösung ist die Nutzung zusätzlicher Informationen eines Testmarktes $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_K\}$. Bei Kenntnis der Likelihoods $p(x_k \mid s_j)$ kann mittel des Satzes von BAYES die a priori-Verteilung $p(s_j)$ durch die a posteriori-Verteilung $p(s_j \mid x_k) = \dfrac{p(x_k \mid s_j) \cdot p(s_j)}{\sum_{j=1}^{n} p(x_k \mid s_j) \cdot p(s_j)}$ ersetzt werden

Auch wenn die Bedenken gegen die klassische präskriptiven Entscheidungstheorie zu Recht bestehen, wird in der Praxis dennoch eine erfolgreiche Unterstützung von Entscheidern im Entscheidungsprozeß und ein überzeugendes Instrument zur Alternativenauswahl benötigt. Man muß nur versuchen, den Anforderungen in einer realistischeren Form gerecht zu werden.

Ein vielversprechender Ansatz ist die Integration eines adaptiven Problemlösungsprozesses und eine stärkere Berücksichtigung des beschränkt rationalen Verhaltens von Entscheidungsträgern in normativen Modellen. Einerseits ist damit ein Abrücken von dem klassischen Optimierungsgedanken zugunsten von Satisfizierungsansätzen gemeint. Andererseits bedeutet dies eine realitätsnähere Gestaltung des Suchprozesses für Alternativen und Konsequenzen; z. B. benötigen alle klassischen Modelle eindeutig bestimmte Inputgrößen. Um eine Fehlmodellierung zu vermeiden, wird daher bei einer Abbildung durch ein klassisches Modell eine umfangreiche Informationsaufnahme und -verarbeitung erforderlich. Die Entscheider sind aber oft - und unserer Ansicht nach auch zu Recht - nicht bereit, derart hohe Vorleistungen in Form von Informationsaufnahme und Problemmodellierung zu erbringen. Darüber hinaus kann auch nicht mit Sicherheit garantiert werden, dass man trotz intensiver Vorarbeit eindeutige reelle Daten erhält. Man denke nur an zukunftsorientierte Werte, die prognostiziert werden müssen, ohne dass ausreichende Erfahrungswerte vorliegen. Abgesehen von der Frage nach geeigneten Prognosemethoden bzw. Rechenalgorithmen ist die Datenbasis oft so gering und so ungenau, dass auch stochastische Verfahren keine ausreichende Grundlage besitzen.

Letztendlich wird man meist einige der Modellparameter nur größenordnungsmäßig angeben können. Es wäre aber nun falsch, diese ungenauen Größen durch „Mittelwerte“ zu ersetzen, denn auf diese Weise erhält man leicht ein Modell, welches das Realproblem nicht ausreichend genug widerspiegelt und man läuft Gefahr eine Lösung zu ermitteln, die zwar optimal in Bezug auf das Modell ist, aber nicht im Hinblick auf das reale Problem. Besser ist es, diese vagen Größen in das Modell aufzunehmen und dann zu versuchen, eine Lösung für dieses Modells mit vagen Daten zu ermitteln. Seit der Veröffentlichung der Arbeit "Fuzzy Sets" durch Lotfi A. ZADEH [Za65] existiert eine Möglichkeit, ungenaue Daten oder verbal formulierte Bewertungen mathematisch zu fassen, und dies so genau, wie ein ET dies sieht und ausdrücken kann.

Unsere Empfehlung für eine realistischere und damit auch glaubwürdigere präskriptive Entscheidungstheorie besteht daher darin, reale Entscheidungsprobleme zunächst in ein Fuzzy-Modell abzubilden, das den aktuellen Informationsstand möglichst genau widerspiegelt. Es läßt sich zeigen, dass fast alle klassischen Entscheidungsmodelle auf Fuzzy-Modelle erweitern und analog lösen lassen. Auf der Basis dieser Information ist dann zu entscheiden, ob zusätzliche Informationen zur Verbesserung der Modellstruktur und der Modelldaten beschafft werden. Wenn ja, ist eine Lösung des verbesserten Modells zu errechnen und so weiter bis eine zufriedenstellende Lösung gefunden ist. Diese interaktive, schrittweise Vorgehensweise bietet - erstmalig - einen praktikablen Weg, zusätzliche Informationen zielgerichtet und unter Kosten/Nutzen-Abwägung zu beschaffen. Dabei können Informationskosten gespart werden, da auch bei ungenauer Informationslage i. allg. einige Alternativen frühzeitig ausgemustert werden können und daher keiner genaueren Bewertung bedürfen.

Insbesondere zwischen 1975 und 1985 wurden zahlreiche Arbeiten veröffentlicht, in den unterschiedliche Komponenten des klassischen Entscheidungsmodells fuzzyfiziert wurden, vgl. hierzu die ausführliche Darstellung in [Ro94].

Ein Grund dafür, daß diese neuen Modelle in der Praxis kaum eingesetzt werden, ist, dass sie Praktikern noch nicht bekannt sind. Zum Teil sind aber auch die Fuzzy-Erweiterungen wenig hilfreich bei der Lösung realer Probleme. Die beste Chance zur Akzeptanz von Entscheidungsmodellen bei der Unterstützung praktischer Probleme liegt in der Verwendung von Fuzzy-Nutzen (Fuzzy-Ergebnissen) und Fuzzy-Wahrscheinlichkeiten. Diese Arbeit konzentriert sich daher auf diese beiden Erweiterungen.

2 Zur Modellierung von Fuzzy-Größen

Bei praktischen Anwendungen ist es zumeist sehr schwierig, Ergebnisse $g_{ij} = g(a_i,s_j)$ in Nutzenwerte $u_{ij} = u(g(a_i,s_j))$ adäquat abzubilden. Bei Verwendung von Fuzzy-Ergebnissen $\widetilde{G}_{ij} = \{(g,\mu_{G_{ij}}(g) \mid g \in G)\}$ haben wir die gleichen Probleme. Dennoch soll hier nicht diskutiert werden, wie (Fuzzy-)Nutzenwerte in der Praxis ermittelt werden können. Es wird vereinfachend unterstellt, daß der ET seine Nutzenfunktion u = $u(g_{ij})$ und damit die Fuzzy-Ereignisse in Fuzzy-Nutzen $\widetilde{U}_{ij} = \{(u(g), \mu_{G_{ij}}(g) \mid g \in G)\}$ abbildet. Alternativ könnte der ET Fuzzy-Nutzenwerte $\widetilde{U}_{ij} = \{(u, \mu_{U_{ij}}(u)) \,|\, u \in U\}$ direkt festlegen, wobei U die mögliche Menge aller scharfen Nutzenwerte ist. Im Falle der Risikoneutralität kann anstelle der Nutzenwerte $\widetilde{U}_{ij}$ direkt mit den Ergebniswerten $\widetilde{G}_{ij}$ gearbeitet werden.

In der Literatur werden die Werte $\widetilde{G}_{ij}$ oder $\widetilde{U}_{ij}$ zumeist in Form triangularer Fuzzy-Zahlen modelliert. Diese Funktionsform ist aber wenig realistisch und sollte daher durch die allgemeineren Fuzzy-Intervallen ersetzt werden. Andererseits hat ein ET oft mehr Informationen, um die Zugehörigkeitsfunktionen genauer modellieren zu können.

Ein geeigneter Weg zur Modellierung von Fuzzy-Mengen für praktische Anwendungen ist die Verwendung von Fuzzy-Intervallen des λ-ε-Typs, die auf dem Darstellungssatz basieren. Dieser besagt, daß Fuzzy-Mengen eindeutig beschrieben sind durch die Gesamtheit ihrer α-Niveau-Mengen $A_\alpha = \{x \in X \,|\, \mu_A(x) \geq \alpha\}$, d. h. durch klassische Mengen, deren Elemente einen Zugehörigkeitsgrad größer gleich α aufweisen.

Bei praktischen Anwendungen ist jedoch kaum zu erwarten, daß ein ET die Gesamtheit der α-Niveaus und damit den genauen Verlauf der Zugehörigkeitsfunktionen angeben kann. Der Aufwand wäre meistens zu hoch und die Beschreibung müsste fortwährend den durch neue Informationen hervorgerufenen Veränderungen angepaßt werden. Für praktische Anwendung reicht normalerweise die Beschränkung auf drei α-Niveaus aus, denen eine inhaltliche Bedeutung zugemessen wird, vgl. [Ro94].

Der ET hat dann die Größen $\underline{u}_{ij}^{1}, \overline{u}_{ij}^{1}, \underline{u}_{ij}^{\lambda}, \overline{u}_{ij}^{\lambda}, \underline{u}_{ij}^{\varepsilon}, \overline{u}_{ij}^{\varepsilon} \in \mathbf{R}$ so festzulegen, dass

$$\mu_{U_{ij}}(y) \begin{cases} = 1 & \text{if } y \in [\underline{u}_{ij}^{1}, \overline{u}_{ij}^{1}] \\ < 1 & \text{else} \end{cases}, \quad \mu_{U_{ij}}(y) \begin{cases} \geq \lambda & \text{if } y \in [\underline{u}_{ij}^{\lambda}, \overline{u}_{ij}^{\lambda}] \\ < \lambda & \text{else} \end{cases}$$

und $\mu_{U_{ij}}(y) \begin{cases} \geq \varepsilon & \text{if } y \in [\underline{u}_{ij}^{\varepsilon}, \overline{u}_{ij}^{\varepsilon}] \\ < \varepsilon & \text{else} \end{cases}$.

Dabei sind die Intervalle $[\underline{u}_{ij}^{\alpha}, \overline{u}_{ij}^{\alpha}]$, $\alpha = 1, \lambda, \varepsilon$ um so größer, je geringer der Informationsstand des ET ist.

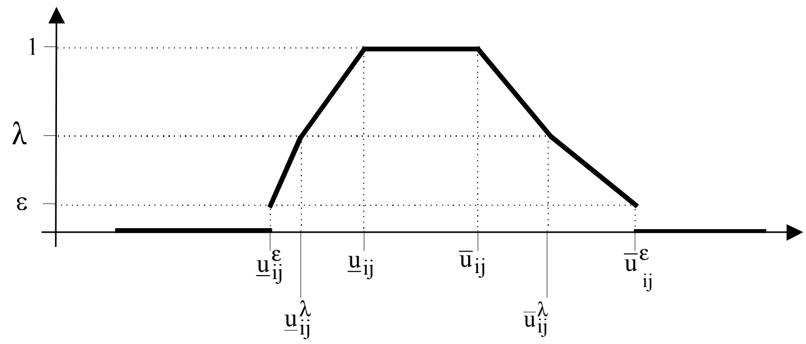

Abb. 1: $\widetilde{U}_{ij} = (\underline{u}_{ij}^{\varepsilon}; \underline{u}_{ij}^{\lambda}; \underline{u}_{ij}^{1}; \overline{u}_{ij}^{1}; \overline{u}_{ij}^{\lambda}; \overline{u}_{ij}^{\varepsilon})^{\varepsilon,\lambda}$

Der Polygonzug von ($\underline{u}_{ij}^{\varepsilon}$, ε) über ($\underline{u}_{ij}^{\lambda}$, λ), ($\underline{u}_{ij}^{1}$, 1), ($\overline{u}_{ij}^{1}$, 1), ($\overline{u}_{ij}^{\lambda}$, λ) zu ($\overline{u}_{ij}^{\varepsilon}$, ε) ist daher eine adäquate Beschreibung der Zugehörigkeitsfunktion von $\tilde{U}_{ij}$ auf $[\underline{u}_{ij}^{\varepsilon}, \overline{u}_{ij}^{\varepsilon}]$. Fuzzy-Intervalle $\tilde{U}_{ij}$ dieses Typs bezeichnet man als Fuzzy-Intervalle des λ-ε-Typs und kürzt sie ab mit $(\underline{u}_{ij}^{\varepsilon}; \underline{u}_{ij}^{\lambda}; \underline{u}_{ij}^{1}; \overline{u}_{ij}^{1}; \overline{u}_{ij}^{\lambda}; \overline{u}_{ij}^{\varepsilon})^{\lambda,\varepsilon}$.

Ein Vorteil der Fuzzy-Intervalle des λ-ε-Typs ist, daß die Erweiterung der arithmetischen Operationen auf Fuzzy-Intervalle besonders einfach ist, z.B. gilt:

$$(\underline{a}^{\varepsilon}, \underline{a}^{\lambda}, \underline{a}^{1}, \overline{a}^{1}, \overline{a}^{\lambda}, \overline{a}^{\varepsilon})^{\varepsilon,\lambda} \oplus (\underline{b}^{\varepsilon}, \underline{b}^{\lambda}, \underline{b}^{1}, \overline{b}^{1}, \overline{b}^{\lambda}, \overline{b}^{\varepsilon})^{\varepsilon,\lambda} = (\underline{a}^{\varepsilon} + \underline{b}^{\varepsilon}, \underline{a}^{\lambda} + \underline{b}^{\lambda}, \underline{a}^{1} + \underline{b}^{1}, \overline{a}^{1} + \overline{b}^{1}, \overline{a}^{\lambda} + \overline{b}^{\lambda}, \overline{a}^{\varepsilon} + \overline{b}^{\varepsilon})^{\varepsilon,\lambda} \tag{2}$$

$$(\underline{a}^{\varepsilon}, \underline{a}^{\lambda}, \underline{a}^{1}, \overline{a}^{1}, \overline{a}^{\lambda}, \overline{a}^{\varepsilon})^{\varepsilon,\lambda} \otimes (\underline{b}^{\varepsilon}, \underline{b}^{\lambda}, \underline{b}^{1}, \overline{b}^{1}, \overline{b}^{\lambda}, \overline{b}^{\varepsilon})^{\varepsilon,\lambda} = (\underline{a}^{\varepsilon} \cdot \underline{b}^{\varepsilon}, \underline{a}^{\lambda} \cdot \underline{b}^{\lambda}, \underline{a}^{1} \cdot \underline{b}^{1}, \overline{a}^{1} \cdot \overline{b}^{1}, \overline{a}^{\lambda} \cdot \overline{b}^{\lambda}, \overline{a}^{\varepsilon} \cdot \overline{b}^{\varepsilon})^{\varepsilon,\lambda} \tag{3}$$

3 Fuzzy-Erwartungsnutzen und Präferenzrelationen

Da jede reelle Zahl a als Fuzzy-Zahl modelliert werden kann,

$$\tilde{B} = \{(x, \mu_B(x) \mid x \in \mathbf{R}\} \quad \text{mit} \quad \mu_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x = b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \tag{4}$$

kann man allgemeinen annahmen, daß jede Aktion-Umweltzustand-Kombination durch ein Fuzzy-Nutzenintervall $\tilde{U}_{ij} = (\underline{u}_{ij}^{\varepsilon}; \underline{u}_{ij}^{\lambda}; \underline{u}_{ij}^{1}; \overline{u}_{ij}^{1}; \overline{u}_{ij}^{\lambda}; \overline{u}_{ij}^{\varepsilon})^{\lambda,\varepsilon}$ beschrieben wird.

Ist der ET dann in der Lage, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(s_j), j = 1, 2, \ldots, n$, anzugeben, so lässt sich für jede Alternative a_i der Fuzzy-Erwartungsnutzen berechnen als:

$$\tilde{U}_{ij} = \tilde{U}_{i1} \cdot p(s_1) \oplus \cdots \oplus \tilde{U}_{in} \cdot p(s_n) \tag{5}$$

mit $\underline{u}_i^{\alpha} = \sum_{J=1}^{n} \underline{u}_{ij}^{\alpha} \cdot p(s_j),\ \alpha = \varepsilon, \lambda, 1$ und $\overline{u}_i^{\alpha} = \sum_{J=1}^{n} \overline{u}_{ij}^{\alpha} \cdot p(s_j),\ \alpha = 1, \lambda, \varepsilon$.

Um die Frage nach der nutzenmaximalen Alternative beantworten zu können, müssen die Fuzzy-Größen in eine Rangordnung gebracht werden. In der Literatur findet man eine Fülle unterschiedlicher Vorschläge, vgl. [BD85] und [RO86]. Hier sollen nur drei dieser Präferenzordnungen betrachtet werden, die so ausgewählt sind, daß sie unterschiedlich restriktiv in ihrer Aussagekraft sind und sich im letzteren Fall besonders gut für Fuzzy-Intervalle des ε-λ-Typs eignen.

ρ-Präferenz

Eine Menge $\tilde{U}(a_k)$ wird einer Menge $\tilde{U}(a_i)$ auf dem Niveau $\rho \in [0,1]$ vorgezogen, und man schreibt $\tilde{U}(a_k) \succ_{\rho} \tilde{U}(a_i)$, wenn ρ die kleinste reelle Zahl ist, so dass

$$\operatorname{Inf} \tilde{U}(a_k)_{\alpha} \geq \operatorname{Sup} \tilde{U}(a_i)_{\alpha} \qquad \text{für alle } \alpha \in [\rho, 1] \tag{6}$$

und für wenigstens ein $\alpha \in [\rho, 1]$ diese Ungleichung im strengen Sinne erfüllt ist.
Dabei sind $U(a_i)_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{U(a_i)}(x) \geq \alpha\}$ und $U(a_k)_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{U(a_k)}(x) \geq \alpha\}$ die α-Niveau-Mengen von $\tilde{U}(a_i)$ bzw. $\tilde{U}(a_k)$.

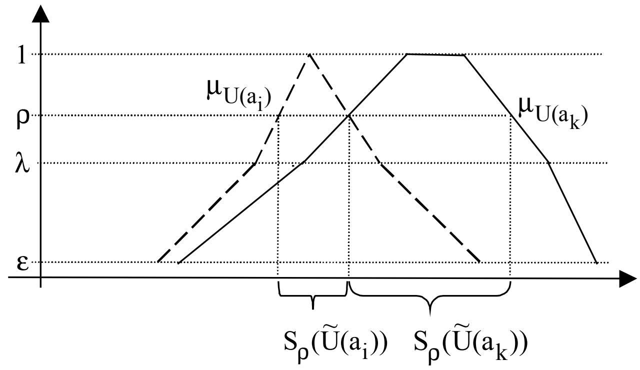

Abb. 2: ρ-Präferenz zwischen zwei Fuzzy-Mengen $\tilde{U}(a_k)$ und $\tilde{U}(a_i)$

Ob ein Entscheidungsträger ein Präferenzniveau ρ für ausreichend hält, hängt von seiner subjektiven Risikoeinstellung ab. Da Fuzzy-Intervalle des ε-λ-Typs nur für die Niveaus ε, λ und 1 exakt beschrieben sind, wird man auch in erster Linie ρ einen dieser drei Werte zuordnen.

Gilt $\tilde{U}(a_k) \succ_\rho \tilde{U}(a_i)$ für $\rho = \lambda$, so sind die Ergebnisse bei Wahl der Alternativen a_k immer besser als die Ergebnisse bei Wahl der Alternativen a_i, wenn man nur die Ergebnisse mit hohen Realisierungschancen beachtet.

Gilt $\tilde{U}(a_k) \succ_\rho \tilde{U}(a_i)$ für $\rho = 1$, so sind die Ergebnisse bei Wahl der Alternativen a_k immer besser als die Ergebnisse bei Wahl der Alternativen a_i, wenn man nur die Ergebnisse mit der höchsten Realisierungschance beachtet.

In der ρ-Präferenz kommt eine recht pessimistische Grundhaltung zum Ausdruck, da hier nur die negativen und nicht gleichzeitig auch die positiven Aspekte berücksichtigt werden. Ausgewogener und für die Anwendung geeigneter ist nach unserer Meinung die folgende Präferenzrelation, die in der Extremform $\varepsilon = 0$ auf J. RAMIK; J. RIMANEK [RR85] zurückgeht.

ε-Präferenz

Eine Fuzzy-Menge $\tilde{U}(a_k)$ wird einer Menge $\tilde{U}(a_i)$ auf dem Niveau $\varepsilon \in [0,1]$ vorgezogen, und man schreibt $\tilde{U}(a_k) \succ_\varepsilon \tilde{U}(a_i)$, wenn ε die kleinste reelle Zahl ist, so dass

$$\text{Sup } U(a_k)_\alpha \geq \text{Sup } U(a_i)_\alpha \quad \text{und} \quad \text{Inf } U(a_k)_\alpha \geq \text{Inf } U(a_i)_\alpha \quad \text{für alle } \alpha \in [\varepsilon, 1] \qquad (7)$$

und für wenigstens ein $\alpha \in [\varepsilon, 1]$ eine dieser Ungleichungen im strengen Sinne erfüllt ist.

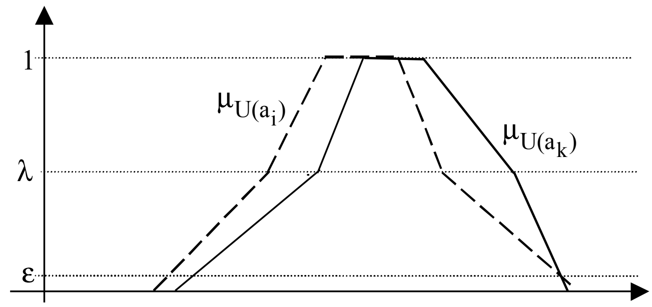

Abb. 3: ε-Präferenz zwischen zwei Fuzzy-Mengen $\tilde{U}(a_k)$ und $\tilde{U}(a_i)$

Für Fuzzy-Intervalle $\tilde{X}_i = (\underline{x}_i^{\varepsilon}, \underline{x}_i^{\lambda}, \underline{x}_i^{1}, \overline{x}_i^{1}, \overline{x}_i^{\lambda}, \overline{x}_i^{\varepsilon})^{\varepsilon,\lambda}$ des ε-λ-Typs lassen sich die Bedingungen (7) vereinfachen zu

$$\tilde{X}_k \succ_{\varepsilon} \tilde{X}_i \iff \underline{x}_k^{\alpha} > \underline{x}_i^{\alpha} \text{ und } \overline{x}_k^{\alpha} > \overline{x}_i^{\alpha} \text{ für } \alpha = \varepsilon, \lambda, 1 . \tag{8}$$

Die anderen Präferenzmethoden basieren auf Defuzzifizierung, d.h. die Fuzzy-Mengen werden auf eine scharfe Zahl komprimiert, um dann die natürliche Ordnung der reellen Zahlen zu nutzen. Da in einer empirischen Studie von ROMMELFANGER [RO86] das Niveau-Ebenen-Verfahren neben dem Kriterium von CHEN [Ch85] am besten abgeschnitten hat und ersteres besonders gut zu Fuzzy-Intervallen des ε-λ-Typs paßt, soll nur dieses Kriterium hier angewendet werden. Für konvexe Fuzzy-Mengen hat es die Form:

$$R(\tilde{U}_i) = \frac{\underline{u}_i^1 + \overline{u}_i^1}{2} \cdot w_1 + \frac{\underline{u}_i^{\lambda} + \overline{u}_i^{\lambda}}{2} \cdot w_{\lambda} + \frac{\underline{u}_i^{\varepsilon} + \overline{u}_i^{\varepsilon}}{2} \cdot w_{\varepsilon} \tag{9}$$

mit $w_1 + w_{\lambda} + w_{\varepsilon} = 1$.

Normalerweise setzt man $w_1 = w_{\lambda} = w_{\varepsilon} = \frac{1}{3}$, aber der ET kann die Gewichte auch individuell festlegen.

4 Verwendung zusätzlicher Informationen

Im klassischen Entscheidungsmodell können zusätzliche Informationen nur dazu dienen, die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Umweltzustände zu verbessern und somit eine realistischere Lösung zu erzielen. Da die Ergebnis- und Nutzenwerte als eindeutig bekannt unterstellt werden, ist definitionsgemäß eine Präzisierung dieser Werte nicht möglich. Vielmehr ist zur Vermeidung einer Fehlspezifizierung dafür Sorge zu tragen, daß genügend Informationen besorgt und verarbeitet werden, damit die Ergebnisse und die Wahrscheinlichkeitswerte das Realproblem hinreichend genau beschreiben. Die Berechnung von a posteriori-Wahrscheinlichkeiten setzt aber voraus, daß der ET in der Lage ist, die Likelihoods $p(x_k \mid s_j)$ anzugeben. Da dies in der Praxis aber höchst unwahrscheinlich ist, sind die in der Entscheidungstheorie empfohlene Verwendung von a posteriori-Wahrscheinlichkeiten und die Berechnung des Wertes dieser zusätzlichen Informationen von rein theoretischem Interesse. Es sollte aber nicht unerwähnt bleiben, dass a posteriori Wahrscheinlichkeiten problemlos in Fuzzy-Modellen eingesetzt werden können, vgl. [Ro94].

Bei Fuzzy-Modellen besteht aber zusätzlich die Möglichkeit, durch Aufnahme und Verarbeitung zusätzlicher Informationen die Ergebnis- und Nutzenwerte sowie die a priori-Wahrscheinlichkeiten genauer zu beschreiben. Dabei reicht es bei den Ergebniswerten aus, sich auf die Alternativen zu beschränken, die noch als Lösung in Betracht kommen.

Darüber hinaus bietet eine schrittweise Aufnahme und Verarbeitung zusätzlicher Informationen einen Ausweg aus dem Informationsdilemma realer Probleme:
Im Gegensatz zur umfangreichen Aufnahme von Informationen bei der Modellierung des Modells, sollte man mit einem Modell beginnen, das nur die Informationen enthält, die vorliegen oder bequem und kostengünstig zu beschaffen sind. Enthält dieses Modell Fuzzy-Ergebnisse und oder Fuzzy-Wahrscheinlichkeiten, so kann es vorkommen, dass keine eindeutige Rangordnung der Alternativen oder die Festlegung der optimalen Alternativen möglich ist. Aber normalerweise läßt sich feststellen, dass ein Großteil der Alternativen als Lösung nicht mehr in Frage kommt. Im nächsten Schritt sind dann nur noch für die verbleibenden Alternativen die Ergebnisse genauer zu bestimmen, wobei nun eine Kosten-Nutzen-Abwägung möglich ist. Die Verwendung von Fuzzy-Modellen stellt zusammen mit einer schrittweisen Informationsaufnahme einen Weg zur Reduzierung von Informationskosten dar. Eine Bestimmung des Wertes dieser zusätzlichen Informationen ist nur möglich für den unrealistischen Fall, daß alle Ergebnisse durch Fuzzy-Zahlen beschrieben werden und die zusätzlichen Informationen den Gipfelpunkt dieser Zahlen nicht beeinflussen, vgl. [TI84].

5 Fuzzy-Wahrscheinlichkeiten

Betrachtet man nun den Fall, daß die a priori-Wahrscheinlichkeiten nur vage beschrieben werden durch Fuzzy-Intervalle $\tilde{P}(s_j) = (\underline{p}_j^{\varepsilon}; \underline{p}_j^{\lambda}; \underline{p}; \overline{p}_j^{1}; \overline{p}_j^{\lambda}; \overline{p}_j^{\varepsilon})^{\varepsilon,\lambda}$, j = 1, 2,..., n, dann lassen sich die Fuzzy-Erwartungswerte auf einfache Weise näherungsweise berechnen als:

$$\tilde{E}_i^A = (\underline{E}_i^{\varepsilon}; \underline{E}_i^{\lambda}; \underline{E}_i^{1}; \overline{E}_i^{1}; \overline{E}_i^{\lambda}; \overline{E}_i^{\varepsilon})^{\varepsilon,\lambda} = \tilde{U}_{i1} \cdot \tilde{P}(s_1) \oplus \cdots \oplus \tilde{U}_{in} \cdot \tilde{P}(s_n)\,, \tag{10}$$

mit $\underline{E}_i^{\alpha} = \sum_{J=1}^{n} \underline{u}_{ij}^{\alpha} \cdot \underline{p}_j^{\alpha}, \alpha = \varepsilon, \lambda, 1$ und $\overline{E}_i^{\alpha} = \sum_{J=1}^{n} \overline{u}_{ij}^{\alpha} \cdot \overline{p}_j^{\alpha}, \alpha = 1, \lambda, \varepsilon$.

Zur exakten Berechnung der Erwartungswerte $\tilde{E}_i^P$ wird die zusätzliche Restriktion $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$ benötigt. Es gilt daher

$$\tilde{E}_i^P \subseteq \tilde{E}_i^A \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{E_i^P}(u) \le \mu_{E_i^A}(u) \quad . \tag{11}$$

Somit ist die Berechnung der exakten Erwartungswerte $\tilde{E}_i^P$ nur notwendig für die Alternativen, die nicht auf Basis der Näherungswerte $\tilde{E}_i^A$ bei Verwendung der ρ-Präferenz mit $\rho = \varepsilon$ ausgeschlossen werden können.

Die Berechnung der Fuzzy-Erwartungswerte $\tilde{E}_i^P = (\underline{E}_i^\varepsilon; \underline{E}_i^\lambda; \underline{E}_i^1; \overline{E}_i^1; \overline{E}_i^\lambda; \overline{E}_i^\varepsilon)^{\varepsilon,\lambda}$ erfolgt nach den Formeln:

$$\underline{E}_i^\alpha = \text{Min}\{\sum_{j=1}^{n} \underline{u}_{ij}^\alpha \cdot p_j \,|\, p_j \in [\underline{p}_j^\alpha, \overline{p}_j^\alpha] \text{ and } \sum_{j=1}^{n} p_j = 1\}, \quad \alpha = 1, \lambda, \varepsilon$$

$$\overline{E}_i^\alpha = \text{Max}\{\sum_{j=1}^{n} \overline{u}_{ij}^\alpha \cdot p_j \,|\, p_j \in [\underline{p}_j^\alpha, \overline{p}_j^\alpha] \text{ and } \sum_{j=1}^{n} p_j = 1\}, \quad \alpha = 1, \lambda, \varepsilon$$

Eine einfache Berechnung bieten die beiden folgenden Algorithmen:

Algorithmus zur Berechnung der Hilfsgrößen $\overset{=\alpha}{p_j}(i)$ zur Kalkulation von $\overline{E}_i^1; \overline{E}_i^\lambda; \overline{E}_i^\varepsilon$.

1. Setze alle Eintrittswahrscheinlichkeiten auf den kleinsten Wert, d. h.: $\overset{=\alpha}{p_j}(i) = \underline{p}_j^\alpha$.
2. Erhöhe die Wahrscheinlichkeit für den Umweltzustand mit dem **größten** Nutzenwert so weit wie möglich. Sei (o.B.d.A.) s_1 dieser Zustand, so gilt:

   $$\overset{=\alpha}{p_1}(i) = \text{Max}\{p \in [\underline{p}_1^\alpha, \overline{p}_1^\alpha] \,|\, p + \sum_{j=2}^{n} \underline{p}_j^\alpha \le 1\}$$
3. Gilt in der vorstehenden Bedingung das Ungleichheitszeichen im strengen Sinne, dann ist im nächsten Schritt die Wahrscheinlichkeit für den Zustand mit dem zweithöchsten Nutzen zu berechnen. Dies sei (o. B.d.A.) s_2, dann setze

   $$\overset{=\alpha}{p_2}(i) = \text{Max}\{p \in [\underline{p}_2^\alpha, \overline{p}_2^\alpha] \,|\, p_1^\alpha + p + \sum_{j=3}^{n} \underline{p}_j^\alpha \le 1\}$$
4. Dieses Verfahren ist bei analoger Vorgehensweise solange fortzusetzen, bis die Ungleichung als Gleichung erfüllt ist.

Algorithmus zur Berechnung der Hilfsgrößen $\underset{=}{p}_j(i)$ zur Kalkulation von $\underline{E}_i; \underline{E}_i; \underline{E}_i^1$:

1. Setze alle Eintrittswahrscheinlichkeiten auf den kleinsten Wert, d. h.: $\underset{=j}{p^\alpha}(i) = \underline{p}_j^\alpha$.
2. Erhöhe die Wahrscheinlichkeit für den Umweltzustand mit dem **kleinsten** Nutzenwert so weit wie möglich. Sei (o.B.d.A.) s_n dieser Zustand, so gilt:

   $$\underset{=n}{p^\alpha}(i) = \text{Max}\{p \in [\underline{p}_n^\alpha, \overline{p}_n^\alpha] \,|\, \sum_{j=1}^{n-1} \underline{p}_j^\alpha + p \le 1\}$$
3. Gilt in der vorstehenden Bedingung das Ungleichheitszeichen im strengen Sinne, dann ist im nächsten Schritt die Wahrscheinlichkeit für den Zustand mit dem zweithöchsten Nutzen zu berechnen. Dies sei (o. B.d.A.) s_{n-1}, dann setze

   $$\underset{=n-1}{p^\alpha}(i) = \text{Max}\{p \in [\underline{p}_{n-1}^\alpha, \overline{p}_{n-1}^\alpha] \,|\, \sum_{j=1}^{n-2} \underline{p}_j^\alpha + p + p_n^\alpha \le 1\}$$
4. Dieses Verfahren ist bei analoger Vorgehensweise solange fortzusetzen, bis die Ungleichung als Gleichung erfüllt ist.

6 SCHLUßBEMERKUNG

In diesem Beitrag wurde deutlich, daß die Modellierung realer Entscheidungsprobleme in Form von Fuzzy-Modellen i.a. zu einer deutlichen Einsparung von Informationskosten führt. Dies ist dadurch begründet, daß Informationen nicht wie bei klassischen Modellen zu Beginn „flächendeckend" erhoben werden, sondern schrittweise unter Abwägung von Nutzen und Kosten.

Literaturverzeichnis

[BD85] Bortolan, G. and Degani, R.: Ranking Fuzzy Subsets. Fuzzy Sets and Systems 15, 1985; S. 1-19

[Ch85] Chen, S.H.: Ranking of Fuzzy Numbers with Maximizing and Minimizing set. Fuzzy Sets and Systems 17, 1985; S. 113-129

[DP82] Dubois, D. and Prade, H.: The Use of Fuzzy Numbers in Decision Analysis. In (Gupta, M.M. and Sanchez, E. Hrsg.): Fuzzy Information and Decision Processes. Amsterdam New York Oxford, 1982; S. 309 -321

[DP89] Dubois, D. and Prade, H.: Ranking of Fuzzy Numbers in the Setting of Possibility Theory. Information Sciences 30, 1989; S. 183-224

[Li87] Lilien, G.: MS/OR: A mid-life crises. Interfaces 17, 1987; S. 53-59

[Me89] Meyer zu Selhausen, H.: Repositioning OR's Products in the Market. Interfaces 19, 1989; S. 79-87

[NM53] Neumann, J.v. und Morgenstern, O.: Theory of games and economic behavior. Princeton, 1953

[RR85] Ramik, J. und Rimanek, J.: Inequality between Fuzzy Numbers and its Use in Fuzzy Optimization. Fuzzy Sets and Systems 16, 1985; S. 123-138.

[Ro84] Rommelfanger, H.: Entscheidungsmodelle mit Fuzzy-Nutzen. Operations Research Proceedings 1983, 1984; S. 559-567

[Ro86] Rommelfanger, H.: Rangordnungsverfahren für unscharfe Mengen. OR-Spektrum 8, 1986; S. 219-228

[Ro94] Rommelfanger, H.: Entscheiden bei Unschärfe - Fuzzy Decision Support-Systeme. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1994

[RE02] Rommelfanger, H. und Eickemeier, S.: Entscheidungstheorie. Klassische Konzepte und Fuzzy-Erweiterungen. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2002

[TO76] Tanaka, H.; Okuda, T. and Asai, K.: A Formulation of Fuzzy Decision Problems and its Application to an Investment Problem. Kybernetes 5, 1976; S. 25-30

[TI84] Tanaka, H.; Ichihashi, H. and Asai, K.: A Formulation of Linear Programming Problems based on Comparison of Fuzzy Numbers. Control and Cybernetics 13, 1984; S. 185-194

[Ti87] Tingley, G.A.: Can MS/OR sell itself well enough? Interfaces 17, 1987; S. 41-52

[Za] Zadeh, L.A.: Fuzzy Sets. Information and Control 8, 1965; S. 338-353