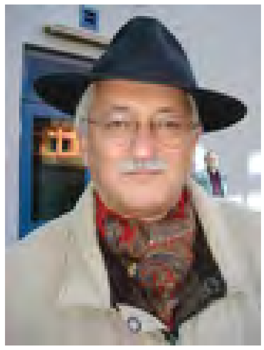

Schnitte von Zylindern und Kegeln

J. Meyer
(Hameln)

j.m.meyer@t-online.de

Einführung

Wenn man einen Zylinder mit einer Ebene schneidet, bekommt man als Schnittkurve eine Ellipse, und wenn man den Zylinder abwickelt, wird aus der Ellipse eine Sinuskurve. Warum ist das so? Und was passiert, wenn man den Zylinder durch einen Kegel ersetzt?

Schnitte von Zylindern

Was für eine Schnittkurve erhält man, wenn man einen Zylinder mit einer Ebene schneidet (Abb. 1)?

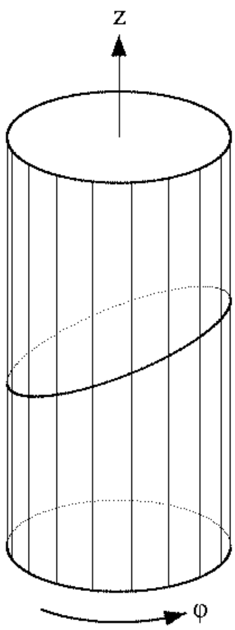

Abbildung 1: *Zylinderschnitt*

Der Zylinder habe die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (z \text{ beliebig})$$

(die z-Achse ist also die Symmetrieachse des Zylinders), die Ebene habe die Gleichung $z = mx$ mit $m = \tan\alpha$. Im Zylindermantel sind die Geraden mit dem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$ enthalten; ihr Schnitt mit der Ebene liefert den allgemeinen Punkt der Schnittkurve $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ m \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}$. Was ist das für eine Kurve? Dazu ist es hilfreich, die Schnittebene und damit die Schnittkurve mithilfe der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

in die Ebene mit $z = 0$ hineinzudrehen (die y-Achse ist also Drehachse). M bildet den allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ m \cdot x \end{pmatrix}$ der Schnittebene auf $\begin{pmatrix} x/\cos\alpha \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ ab und den allgemeinen Punkt der Schnittkurve auf $\begin{pmatrix} \cos\varphi/\cos\alpha \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$. Man erkennt, dass es sich um einen mit dem Faktor $\frac{1}{\cos\alpha}$ gestreckten Kreis und damit um eine *Ellipse* handelt. Ist $\alpha = 0°$, bekommt man als Schnittkurve natürlich einen ungestreckten Kreis.
Schneidet man den Zylinder parallel zu seiner Symmetrieachse auf, bekommt man ein Rechteck; die Schnittkurve hat nun den allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} \varphi \\ m \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}$, ist also eine *Sinuskurve* (und für $m = 0$ eine Gerade).

Schnitte von Kegeln

Nun liegt es nahe, die analoge Fragestellung für Kegel zu untersuchen. Die Kegelspitze sei $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$; der Grundkreis habe den Radius r und den allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \\ -h \end{pmatrix}$. Die Gesamthöhe beträgt also $2 \cdot h$ (das hat den Grund, um später die Schnittebene möglichst einfach halten zu können). Der allgemeine Punkt der Mantelfläche ist durch

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \\ -2 \cdot h \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \geq 0$ gegeben.
Schneidet man die Mantelfläche mit der Ebene zu $z = m \cdot x$, so ist

$$\lambda = \frac{h}{2 \cdot h + m \cdot r \cdot \cos\varphi};$$

der allgemeine Punkt der Schnittkurve (Abb. 2) ergibt sich als

$$P(\varphi) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} + \frac{h}{2h + mr\cos\varphi} \cdot \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ -h \end{pmatrix}$$
$$= \frac{hr}{2h + mr\cos\varphi} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ m\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

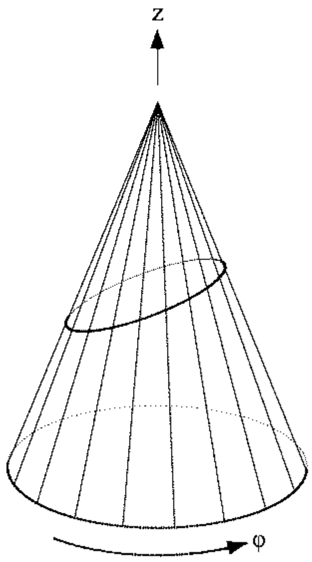

Abbildung 2: *Kegelschnitt*

Für $m = 0$ bekommt man natürlich einen Kreis; im Folgenden sei also $m > 0$.
Wie beim Zylinder ist es auch hier hilfreich, Schnittebene und Schnittkurve mit der obigen Matrix M in die Ebene mit $z = 0$ hineinzudrehen; das Resultat ist

$$Q(\varphi) := \frac{r}{2\cos\alpha\left(1 + \frac{mr}{2h}\cos\varphi\right)} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \cos\alpha\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

(hier ist ein CAS hilfreich).
Mit $\varepsilon := \frac{m \cdot r}{2 \cdot h}$ ist $Q(\varphi)$ bis auf Achsenstreckungen gegeben durch

$$\frac{1}{1 + \varepsilon\cos\varphi} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\xi^2 + \varepsilon^2 \cdot \eta^2 = \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon\cdot\cos\varphi)^2}$ und $1 - \xi = \frac{1}{1+\varepsilon\cdot\cos\varphi}$ ist $\xi^2 + \varepsilon^2 \cdot \eta^2 = \varepsilon^2 \cdot (1-\xi)^2$, woraus

$$\xi^2 \cdot \left(\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\right) + 2 \cdot \xi + \eta^2 = 1$$

folgt. Für $\varepsilon = 1$ (wenn also die Schnittebene zu einer Mantellinie parallel ist) hat man eine *Parabel*, für $0 < \varepsilon < 1$ eine *Ellipse* und für $\varepsilon > 1$ eine *Hyperbel*.
Nun möchte man den Kegel *abwickeln*; dies ist nur im Ellipsenfall sinnvoll, da im Hyperbelfall der Doppelkegel berücksichtigt werden müsste. Das Resultat ist ein Kreissektor mit dem Mittelpunkt Z, dem Radius $s = \sqrt{4 \cdot h^2 + r^2}$ und dem Teilumfang $2\pi r$; der zugehörige Mittelpunktswinkel ermittelt sich wegen $\frac{\mu}{360°} = \frac{2\pi r}{2\pi s}$ zu $\mu = 360° \cdot \frac{r}{s}$ (Abb. 3).

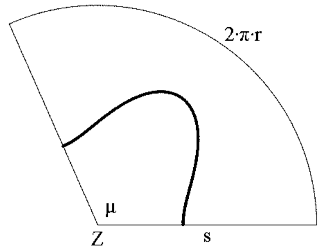

Abbildung 3: *Abgewickelter Kegelschnitt*

Man bildet die Punkte

$$P(\varphi) = \frac{hr}{2h + mr\cos\varphi} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ m\cos\varphi \end{pmatrix}$$

der Schnittkurve ab auf den abgewickelten Mantel; das Resultat heiße $R(\varphi)$. Dem Winkel φ entspricht der Mittelpunktswinkel ψ auf dem Kreissektor, den man wegen $\frac{\varphi}{360°} = \frac{\psi}{\mu}$ zu $\psi = \frac{\mu}{360°} \cdot \varphi$ bestimmt.
Der Abstand d von $P(\varphi)$ zur Kegelspitze Z muss genauso groß sein wie der Abstand zwischen Z und $R(\varphi)$. Daher ist $R(\varphi) = \begin{pmatrix} d \cdot \cos\psi \\ d \cdot \sin\psi \end{pmatrix}$ (hier kommt wieder ein CAS zum Tragen). Abb. 3 zeigt ein mögliches Resultat.
Natürlich kann man die Parameter m, r und h beliebig variieren (unter Beachtung von $\varepsilon = \frac{m \cdot r}{2 \cdot h} < 1$).