

Flächenland und Raumland: Den Dimensionsbegriff mit Virtual Reality erfahrbar machen

Konzeption und Ergebnisse eines DBR-Designzyklus einer mathematikdidaktischen Anwendung für Schülerinnen und Schüler am Übergang zur Sekundarstufe I

Sina Haselmann ¹ und Barbara Schmidt-Thieme²

Abstract: Der Artikel stellt die ersten beiden Phasen sowie den ersten Evaluationszyklus der Entwicklung und Beforschung einer Virtual-Reality-Anwendung zur enaktiven Vermittlung des Dimensionsbegriffs an Schülerinnen und Schüler am Übergang zur Sekundarstufe I dar. Dabei werden fachliche und fachdidaktische Grundlagen ausgeführt sowie relevante Designprinzipien hergeleitet. Ein besonderer Fokus des Design-Based-Research-Projekts (DBR) liegt auf der Frage, ob Lernende mit geringen ausgeprägten räumlichen Vorstellungsvermögen – im Sinne einer Aptitude bzw. Learner Treatment Interaction – vergleichsweise höhere Lernzuwächse mit der immersiven Lerneranwendung erzielen. Abschließend werden erste Evaluationsergebnisse und daraus folgende weitere Designentscheidungen aufgezeigt sowie die anschließenden Schritte im Entwicklungs- und Forschungsprozess skizziert.

Keywords: Virtual Reality, Geometrie, räumliches Vorstellungsvermögen, Design Based Research, Aptitude Treatment Interaction, Learner Treatment Interaction

1 Einleitung

Auch wenn dies den meisten Menschen im Alltag wohl wenig bewusst ist, stellen wir uns den uns umgebenden physischen Raum als einen dreidimensionalen euklidischen Raum vor, wie wir ihn aus dem Geometrieunterricht kennen. Punkte in diesem Raum sind durch drei Koordinaten x , y und z im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem mit seinen drei paarweisen Achsen, die jeweils senkrecht aufeinander stehen, definiert. Entsprechend ist Bewegung in drei Richtungspaaren möglich, die man sich auf Basis der Alltagserfahrungen leicht vorstellen kann: rechts-links, vorne-hinten und oben-unten. Ein

¹ Universität Hildesheim, Projekt Cu2RVE (CeLeB), Universitätsplatz 1, 31141 Hildesheim, haselmann@uni-hildesheim.de,  <https://orcid.org/0000-0002-8897-8147>

² Universität Hildesheim, Mathematikdidaktik I (IMAI) / Projekt Cu2RVE (CeLeB), Universitätsplatz 1, 31141 Hildesheim, bschmidt-thieme@imai.uni-hildesheim.de

zweidimensionaler Raum ist entsprechend nur über zwei Koordinaten und zwei Richtungs-paare definiert, ein eindimensionaler Raum über eine Koordinate und ein Richtungs-paar [SR02].

Nun ist die Mathematik gerade nicht an das physisch mögliche gebunden. So lassen sich auch höherdimensionale Räume und Objekte ohne große Mühe algebraisch definieren und beschreiben, auch wenn sich diese unserer gewohnten Raumvorstellung entziehen [DHM82, SR02]. Um diese Hürde zu überwinden, wurden diverse Versuche unternommen, Menschen mithilfe geeigneter computergenerierter Visualisierungen eine intuitive Vorstellung vom vierdimensionalen Raum und vierdimensionalen geometrischen Objekten zu vermitteln [AWCF09, Wang09, Cerv00, DHM82]. Doch schon im Roman „Flatland. A Romance of Many Dimensions“ von 1884, der Kritik an der engstirnigen viktorianischen Gesellschaft mithilfe von Erzählungen über das zweidimensionale Flächenland und deren Bewohner übt, gelingt eine anschauliche Vermittlung der Idee, was Dimensionalität für das alltägliche Leben bedeutet. Hier wird auch mathematisch gesehen eine Analogie zu unserer Welt gebildet. In einer zentralen Episode des Romans besucht eine dreidimensionale Kugel das Flächenland, deren in ihrer dimensional Wahrnehmung eingeschränkten Bewohner diese nur als „magischen“ zweidimensionalen Kreis wahrnehmen können: Dieser Kreis kann selbst in geschlossenen Räumen plötzlich auftauchen, größer, dann wieder kleiner werden und komplett verschwinden, wobei diese Eigenschaften tatsächlich aus der orthogonalen Bewegung der Kugel durch das Flächenland hindurch von oben nach unten resultieren (siehe Darstellung in [AB15] auf S. 52). Analog dazu würden wir auch ein vierdimensionales Wesen wahrnehmen, das unseren dreidimensionalen Raum durchquert und durch diesen geschnitten wird, und zwar in einer uns unbekannten Richtung, die senkrecht zu unserem dreidimensionalen Raum steht [AB15, Wang09].

Von Abbotts einflussreichem Roman existieren inzwischen diverse Adaptionen und Fortschreibungen, auch für Kinder und Jugendliche [SR02, AB16, BB01, Flat00], sowie Ideen für die Behandlung im Unterricht, welche sich zur ersten intuitiven Vermittlung des Dimensionsbegriffs in Primarstufe und Sekundarstufe I auch die anschaulichen Erklärungen des Romans zu geometrischen Eigenschaften von Raum und Objekten zunutze machen [Schm06, SR02]. Wo genau liegt aber, abgesehen von der Allgegenwärtigkeit des uns umgebenden dreidimensionalen Raumes und der darin enthaltenen Objekte, das Potential der Beschäftigung mit dem Dimensionsbegriff für den Mathematikunterricht? Und wie wird dieser aktuell in der Schule behandelt?

2 Curriculare Verankerung des Dimensionsbegriffs

Tatsächlich ist dieser nicht direkt Teil der Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz für das Fach Mathematik für den Primarbereich oder den Mittleren Schulabschluss [Kmk22a, Kmk22b] und wird entsprechend auch etwa im Niedersächsischen Kerncurri-

culum nicht aufgeführt [Nied17, Nied20a, Nied20b]. Implizit wird aber bereits in der Primarstufe mit dem Dimensionsbegriff gearbeitet, konkret im Rahmen der Leitidee „Raum und Form“. Hier sollen Schülerinnen und Schüler etwa „Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften“ klassifizieren oder „Beziehungen zwischen ihnen beschreiben“ [Kmk22a] können. Außerdem sollen Sie räumliches Vorstellungsvermögen entwickeln, welches als wichtiger Teil allgemeiner Intelligenz angesehen wird [FrRe16, S. 2, 39, Maie99, S. 199], und in diesem Zuge etwa lernen, „zwei- und dreidimensionale Darstellungen zueinander in Beziehung zu setzen“ [Kmk22a] (siehe auch [Nied17]).

Diese Grunderfahrungen und Kompetenzen könnten zum Ende der Primarstufe genutzt werden, um eine erste intuitive Vorstellung des Dimensionsbegriffs zu entwickeln und diese in der Sekundarstufe im Sinne eines Spiralcurriculums wieder aufzugreifen und zu formalisieren. Entsprechende Inhalte zu den Eigenschaften von ebenen Figuren und Körpern, an die angeknüpft werden könnte, finden sich auch heute bereits in den Mathematik-Schulbüchern der Primarstufe wieder (auch wenn diese den Dimensionsbegriff selbst nicht vermitteln), wie Erfahrungen mit Körpern in der Umwelt oder Ansichten und geometrische Eigenschaften von Körpern [Busc18, Busc19] sowie Planquadrate auf maßstäblichen Karten als propädeutische Behandlung kartesischer Koordinatensysteme [Hüb00].

3 Virtual Reality als neues Lernmedium

Eine weitere Empfehlung der KMK-Bildungsstandards, die bereits für die Primarstufe ausgesprochen wird, stellt die Nutzung digitaler Werkzeuge zur Darstellung und Untersuchung von zwei- und dreidimensionalen Modellen dar [Kmk22a]. Dies deckt sich auch mit der Forderung der Strategie der Kultusministerkonferenz „Bildung in der digitalen Welt“ von 2017 sowie deren Ergänzung von 2021, bei der speziell für die MINT-Fächer der Einsatz aktueller Technologien wie Augmented und Virtual Reality angeregt wird [Kult17, Kult21] (zitiert nach [Tahi22], siehe auch [SDW22]). Verbreitete Anwendungen wie Dynamische Geometriesysteme (DGS) oder andere Werkzeuge zum Betrachten und Darstellen räumlicher Objekte wurden bereits als immersive Anwendungen umgesetzt [TaFH22, FlKo22, KaSW00, Cari22]. In ihrer Literaturarbeit hat Tahiri 22 Studien zusammengetragen, die Lerneffekte von AR- und VR-gestützten Geometrie-Anwendungen mit denen nicht-immersiver und nicht-digitaler Medien vergleichen [Tahi22]. Hier wurde teilweise ein signifikant besseres Geometrieverständnis durch das immersive Lernen festgestellt, oft aber auch kein Effekt. Zu ähnlichen Schlüssen kommen andere, fächerübergreifende Literaturrecherchen wie Mayer et al. [MMP22].

Es stellt sich jedoch – auch in Hinblick auf die „great media debate“ zwischen Clark und Kozma [Sick19] (zitiert nach [BK23]) – die Frage, ob Medienvergleichsstudien der situationalen Einbettung von Lernprozessen überhaupt gerecht werden können und nicht jedes Medium grundsätzlich effektiv zum Lernen verwendet werden kann, wenn die dazu passenden Methoden ausgewählt werden. Daher wäre weniger von Interesse, ob immersive

Medien zum Lernen (besser) geeignet sind, sondern auf welche Art deren Alleinstellungsmerkmale zur Förderung von Lernprozessen bestmöglich eingesetzt werden können und welche Themen sich hierfür am besten eignen [HBa22, BK23, MMP22]. So kann auch eine Abkehr von technologiegetriebenen Fragestellungen zugunsten der Erforschung von Designprinzipien gelingen [MBK20] und im Sinne des Aptitude- bzw. Learner-Treatment-Interaction-Ansatzes der Frage mehr Raum gegeben werden, welche Eigenschaften von Lernenden letztendlich welche Einflüsse auf medial vermittelte Lernprozesse haben [BK23, MMP22].

Hartmann und Bannert nennen als besonderes Alleinstellungsmerkmal für Lernumgebungen in Virtual Reality die Möglichkeiten zur Interaktion und zur stereoskopischen Wahrnehmung, welche zum Gefühl von Präsenz in der virtuellen Welt beitragen, sowie zur vollständigen „externen Repräsentation räumlich-situativer Informationen“ [HB22]. Dies könnte besonders den Lernenden den Aufbau mentaler Modelle mit räumlichem Bezug ermöglichen, die hier aufgrund eines geringer ausgeprägten räumlichen Vorstellungsvermögens besonderen Unterstützungsbedarf haben, was in den Studien zum Erlernen räumlicher Strukturen von Molekülen von Safadel und White (immersive stereoskopische Virtual Reality) und von Barrett und Hegarty (stereoskopisches Display) bereits aufgezeigt werden konnte [SW20, BH16]. Zu ähnlichen Schlüssen kamen Lee und Wong in Bezug auf das Erlernen anatomischer Strukturen [LW14], dagegen fand sich bei Sikl et al. im Bereich der Geographie ein leichter Vorteil für immersive VR, wenn die Lernenden bereits über ein stärker ausgeprägtes räumliches Vorstellungsvermögen verfügten [SBŠD23]. Gerade in Bezug auf die Geometrie der Grundschule ergibt sich hier ein interessantes Forschungsfeld, da, wie auch bereits durch die Verankerung in den KMK-Bildungsstandards aufgezeigt, „die Schulung räumlichen Vorstellungsvermögens eines [seiner] der Hauptziele“ [FR16] darstellt und mit digitalen Medien vermittelte Darstellungen hier eine zentrale Rolle spielen sollen.

4 Forschungsfragen und Methodik

Auf Basis dieser Vorüberlegungen soll nun untersucht werden,

1. inwieweit immersive virtuelle Realität dafür geeignet ist, Schülerinnen und Schülern am Übergang zur Sekundarstufe I Wissen zum Dimensionsbegriff zu vermitteln, und
2. welche Interaktionseffekte hier bezüglich des gemessenen räumlichen Vorstellungsvermögens der Schülerinnen und Schüler auftreten.

Die Untersuchung soll nach dem vierphasigen Design Based Research-Prozess ablaufen, wie er auch der Untersuchung von Wichers und Strunk [WS20] zugrunde gelegt wurde [McRe14, Plom13] (siehe Abb. 1). Design Based Research (DBR) hat den Vorteil der starken Ausrichtung an der Lehrpraxis: Es wird ein praktisch nutzbarer Output wie in diesem Fall eine VR-Lernanwendung entwickelt und durch die entsprechende Entwicklungs-

und Forschungsarbeit ebenfalls ein mathematik- und mediendidaktischer Theoriebeitrag generiert. Dieses Vorgehen erscheint auch aufgrund der Designabhängigkeit und Komplexität von VR-Anwendungen als besonders geeignet [SDW22].

So wird im vorliegenden Projekt nach einer theoretischen Verortung ein Konzept ausgearbeitet, nach dem ein VR-Lernspiel zum Dimensionsbegriff entwickelt werden kann. Die Umsetzung erfolgt in mehreren Zyklen der Evaluation, Analyse und des (Re-)Designs bis hin zur praktisch nutzbaren Lernanwendung. Um den Praxisbezug abzusichern, wurden bereits frühzeitig im Projekt Bildungsinstitutionen als Partner für die Evaluation in Phase 3 und den anschließenden Einsatz in praktischen Lernszenarien gesucht. Auf besonderes Interesse stieß das Projekt bei Mitmachmuseen als außerschulische Lernorte wie etwa dem phaeno Science Center. Gewünscht wurde die Einbindung des VR-Lernspiels in einen Workshop zum Dimensionsbegriff, der möglichst ohne großen Personalaufwand mit ganzen Schulklassen durchführbar sein soll [Phae21].

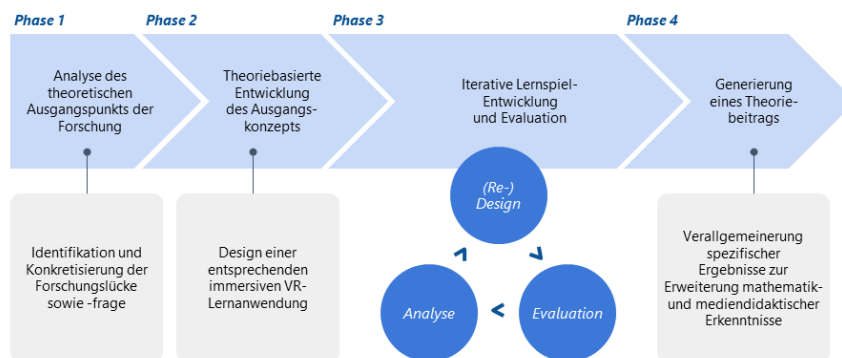


Abb. 1: DBR-Prozess zur Entwicklung und Beforschung einer VR-Lernanwendung zur Vermittlung des Dimensionsbegriffs (nach [WS20])

5 Herleitung relevanter Designprinzipien

Welche Designprinzipien können nun für das Lernen mit VR und das Entwickeln einer konkreten Lernanwendung zugrunde gelegt werden, so dass die Affordanzen dieses Mediums lernförderlich genutzt werden können? Zum Design virtueller Umgebungen gibt es diverse entwicklungspraxisnahe Empfehlungen, siehe etwa das „VR Handbook“ [Jera16], in dem ebenfalls empfohlen wird die Anwendung schon frühzeitig im Entwicklungsprozess zu testen und Feedback einzuarbeiten. Im Bereich der Lehr-Lern-Forschung haben etwa Mulders et al. und Hartmann und Bannert [HB22, MBK20] diverse forschungsgestützte Prinzipien zusammengetragen, die auf Mayers Theorien zu multimedialem Lernen

basieren und der Bedeutung des fachlichen Vorwissens Rechnung tragen. So sollen zentrale Informationen mit Hinweisreizen versehen und zum notwendigen Zeitpunkt ein- sowie anschließend wieder ausgeblendet werden, um unnötige kognitive Belastungen zu vermeiden. Hierbei soll auch auf inhaltliche Kohärenz zwischen Repräsentationsformen geachtet werden. Unnötige Informationen und Darstellungen („seductive details“) sollen vermieden werden.

Im Zusammenhang mit der Entwicklung von VR-Lernspielen für Kinder nennen Belter und Lukosch ergänzend die Anforderungen, eine freundliche, sichere und ansprechende Umgebung zu gestalten, ein Trainingsszenario zur Eingewöhnung in das neue Medium anzubieten und körperliche Aktivitäten einzubeziehen [BL22] (siehe auch [SDW22]). Auch Schäfer et al. [SRGW23] betonen im Zusammenhang mit dem Einsatz in der Schule die Möglichkeit des bewegungsbasierten, praktisch ausgerichteten Lernens, wie es gerade Roomscale-Systeme mit Ihrem Bewegungstracking ermöglichen. Hier finden auch das mathematikdidaktische E-I-S-Prinzip von Bruner Anknüpfungspunkte im Bereich des enaktiven Umgangs mit – in diesem Falle virtuellen – Lernmaterialien, sowie Theorien der Embodied Cognition, nach denen Verkörperung und Bewegung für höhere Lerneffekte sorgen sollen [SDW22]. In Kombination mit der Möglichkeit des räumlich-situativen Erlebens und der Bildung entsprechender mentaler Modelle [HB22] lässt sich die Empfehlung ableiten, den virtuellen Raum und die darin befindlichen Objekte durch körperliche Lernhandlungen wie Laufen und Greifen erfahr- und nachvollziehbar zu machen, um den Dimensionsbegriff enaktiv einzuführen.

Dies entspricht auch der Forderung, Lernende aktiv an der Bildung mathematischer Begriffe zu beteiligen, unter anderem durch Anschauung und Problemlösungsaufgaben, bei denen sie zunächst eigene Erfahrungen machen und diese selbst strukturieren können sollen [BL14, S. 82–83]. Hier kann eine in sich abgeschlossene VR-Umgebung das geleitete Entdecken der Eigenschaften von Räumen und Objekten im Zusammenhang mit dem Dimensionsbegriff ermöglichen (siehe Abb. 2), so dass diese durch anschließende gemeinsame Lernaktivitäten in der Gruppe weiter präzisiert und eingeordnet werden können.

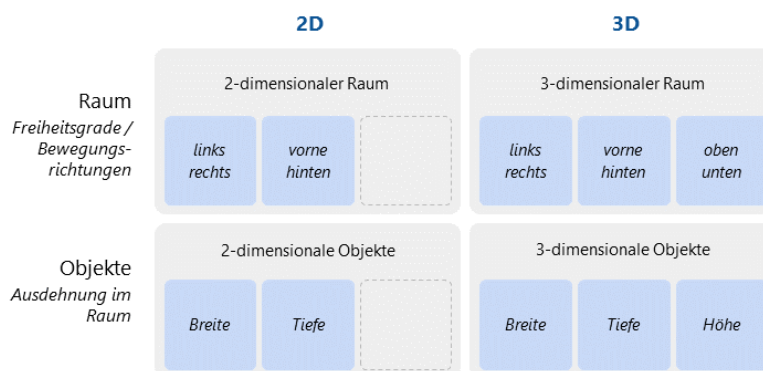


Abb. 2: Für Entwicklung der Lernanwendung relevante dimensionsbezogene Begriffe

Die zentralen abgeleiteten Designentscheidungen, die in einer Lernanwendung für das Standalone Headset Meta Quest 2 umgesetzt und bei einer ersten Evaluation³ in den Fokus gerückt wurden, sind in Tabelle 1 dargestellt. Diese wurde im April 2023 mit 8 Schülerinnen im Alter von 10 bis 12 Jahren im Rahmen eines Girls' Day-Workshops zu Virtual Reality durchgeführt. Ein Spieldurchlauf dauerte jeweils 10-15 min. Dabei wurden Auffälligkeiten und Kommentare zur Interaktion mit dem Lernspiel sowie die Ergebnisse einer kurzen Befragung im Anschluss an die Nutzung notiert („Was findest du an dem Spiel gut?“, „Was würdest du ändern?“, „Möchtest du noch etwas loswerden?“). Die Notizen wurden anschließend auf Usability-Probleme und didaktische Potentiale hin ausgewertet und Design-Entscheidungen für die Anwendung getroffen, die in der nächsten Iteration – neben der Integration weiterer Lernaktivitäten – umzusetzen sind (siehe Tab. 1).

Ursprüngliche Designentscheidung	Evaluationsergebnis (+ Anzahl der Funde)	Weitere Umsetzung in nächster Iteration
Freundlich gestaltetes virtuelles Zimmer zur Repräsentation eines dreidimensionalen Raumes	Könnte ansprechender gestaltet werden, z.B. mehr Bilder, transparente Fenster (2)	Raum umgestalten und bei nächster Evaluation erneut bewerten lassen
Fortbewegung im Raum ausschließlich nach Roomscale-Prinzip	Problematisch bei parallelem Einsatz mehrerer Headsets im Rahmen eines Workshops (8)	Platzbedarf weiter verkleinern, Navigation durch Joysticks als Notlösung?
Auditive Anweisungen und Erklärungen, zusätzlich textuelle Einblendung zentraler Punkte auf Tafel	Auditive Anweisungen beachtet und befolgt, Text auf Tafel nicht beachtet (8)	Tafel entfernen und auditive Anweisung bei Nichtaktivität wiederholen?

³ Screenshots vom evaluierten Entwicklungsstand der App und ein Videolink finden sich auf <https://www.uni-hildesheim.de/fb4/institute/imai/abteilungen/didaktik-der-mathematik-1/mitglieder/sina-haselmann/>.

Einführung der Greifen-Taste zur Interaktion mit Objekten	Aktivierende Interaktionstechnik (8); manche Lernende benötigten zusätzliche Erläuterung (2)	Einführung zum Greifen in separate Einführungszone auslagern
Drei Freiheitsgrade im Raum mit einfachen Lernhandlungen aufgezeigt: Blumen gießen, Glühbirne einsetzen	Blumen gießen als Aufgabe zunächst wenig anregend (5)	Detailliertere Animationen als positives Feedback?
Über Quadrat und Würfel werden prototypische 2- und 3-D-Objekte und deren Eigenschaften wiederholt	Keine Verständnisprobleme, ausreichend Vorwissen bei den Lernenden vorhanden (8)	Kein Änderungsbedarf
Als Klassifikationsaufgabe werden bekannte ebene Figuren und Körper gegriffen und in zwei verschiedenen hohen Schalen gelegt	Keine prinzipiellen Verständnis- oder Interaktionsprobleme bei Aufgabendurchführung (7), aktivierende Aufgabe (8)	Enaktives Aufgabenprinzip kann auf weitere Lernhandlungen übertragen werden

Tab. 1: Zentrale Designentscheidungen mit Evaluationsergebnissen und Konsequenzen für die weitere Umsetzung im nächsten Designzyklus

6 Weitere Schritte im Forschungs- und Entwicklungsprozess

Im Anschluss an diese erste und frühzeitige Evaluation wird die Anwendung im Sinne des DBR-Zyklus überarbeitet und weitere Lernaktivitäten werden basierend auf dem bisherigen Feedback entwickelt, evaluiert und analysiert. Letztendlich soll es den Lernenden durch die virtuelle Umgebung ermöglicht werden, die zu Beginn genannten zentralen Elemente aus dem Roman „Flächenland“ zum Erwerb des Dimensionsbegriffs mithilfe von Lernhandlungen in VR auszuführen und selbst die Rolle der Kugel aus dem Raumland zu übernehmen, die den zweidimensionalen Wesen von Flächenland die Existenz einer höheren Dimension verkündet. Dafür sollen den Lernenden mithilfe einer durchlässigen virtuellen Tischplatte (als Repräsentation einer flachen, zweidimensionalen Welt) verschiedene Querschnitte von Würfeln und Kugeln erzeugen. So sollen sie den ebenen Figuren, die in der virtuellen Umgebung zum Leben erweckt werden und mit den Lernenden interagieren, wiederum die Eigenschaften von Objekten und Räumen vermitteln. Außerdem soll es den Lernenden ermöglicht werden, selbst in die ebene Welt einzutauchen und die Sichtweise der Flächenländer einzunehmen, um direkte Einsicht in deren Alltagserleben zu gewinnen. Hier gilt es eine geeignete Darstellungsform in Virtual Reality zu erarbeiten, die dem immersiven stereoskopischen Medium gerecht wird.

Als Abschluss der interaktiven Geschichte und Anlass für weitere Diskussionen in der Gruppe soll in Analogie zu den Erlebnissen der zweidimensionalen Wesen mit den „Be-

suchen“ aus der 3. Dimension dargestellt werden, wie eine vierdimensionale Kugel plötzlich im geschlossenen virtuellen Zimmer auftaucht, größer und wieder kleiner wird und letztendlich wieder verschwindet. Dies soll den Lernenden eine intuitive Vorstellung davon vermitteln – entsprechend den Ideen des Romans, aber konkret visualisiert anstatt der Vorstellungskraft überlassen – dass auch vier- oder höherdimensionale Räume und Objekte mathematisch beschreibbar und theoretisch möglich sind.

Ob die immersive Darstellung und das enaktiv-körperliche Lernerlebnis in Virtual Reality den Dimensionsbegriff effektiv vermitteln können und inwiefern das räumliche Vorstellungsvermögen der Lernenden zu Interaktionseffekten führt, wird zum Abschluss der Anwendungsentwicklung mithilfe eines selbstentwickelten Wissenstest und eines zielgruppengerechten Tests zu räumlichen Vorstellungsvermögen [Heil20] auch mit quantitativen Methoden überprüft. So soll das Forschungsprojekt letztendlich zur Beantwortung der Frage beitragen, wie konkrete mathematische Lernprozesse in immersiver virtueller Realität effektiv gestaltet werden können und ob sie gerade eine Chance zum adaptiven technologiegestützten Wissenserwerb für Lernende darstellen, die zum Ende der Primarstufe noch keine ausgeprägte Raumvorstellung entwickelt haben.

Literaturverzeichnis

- [AB15] Abbott, Edwin; Banchoff, Thomas: *Flatland: a romance of many dimensions*.
- [AB16] Abbott, Edwin Abbott; Buck, Peter: *Flächenland, Reihe Reprinta historica didactica*. Hildesheim: Franzbecker, 2016 — ISBN 978-3-88120-020-2
- [AWCF09] Ambinder, Michael S.; Wang, Ranxiao Frances; Crowell, James A.; Francis, George K.; Brinkmann, Peter: Human four-dimensional spatial intuition in virtual reality. In: *Psychonomic Bulletin & Review* Bd. 16 (2009), Nr. 5, S. 818–823
- [BH16] Barrett, Trevor J.; Hegarty, Mary: Effects of interface and spatial ability on manipulation of virtual models in a STEM domain. In: *Computers in Human Behavior* Bd. 65, Elsevier Science (2016), S. 220–231
- [BL22] Belter, Meike; Lukosch, Heide: Towards a Virtual Reality Math Game for Learning In Schools - A User Study. In: *2022 IEEE Conference on Virtual Reality and 3D User Interfaces Abstracts and Workshops (VRW)*. Christchurch, New Zealand: IEEE, 2022 — ISBN 978-1-66548-402-2, S. 808–809
- [BB01] Burger, Dionys; Burger, Dionys: *Silvestergespräche eines Sechsecks: ein phantastischer Roman von gekrümmten Räumen und dem sich*

- ausdehnenden Weltall, Unterhaltsame Mathematik.* 8., unveränd. Aufl. Köln: Aulis-Verl. Deubner, 2001 — ISBN 978-3-7614-0085-2
- [BK23] Buchner, Josef; Kerres, Michael: Media comparison studies dominate comparative research on augmented reality in education. In: *Computers & Education* Bd. 195 (2023), S. 104711
- [BL14] Büchter, Andreas; Leuders, Timo: *Mathematikaufgaben selbst entwickeln: Lernen fördern - Leistung überprüfen.* 6. Aufl. Berlin: Cornelsen Scriptor, 2014 — ISBN 978-3-589-22122-6
- [Busc18] Buschmeier, Gudrun: *Denken und Rechnen. 3, [Schülerband].* [Grundschule, Bremen, Hamburg, Hessen, Niedersachsen, Nordrhein-Westfalen, Rheinland-Pfalz, Saarland, Schleswig-Holstein], Druck A. Braunschweig: Westermann, 2018 — ISBN 978-3-14-126323-7
- [Busc19] Buschmeier, Gudrun: *Denken und Rechnen. 4, [Schülerband].* [Grundschule, Bremen, Hamburg, Hessen, Niedersachsen, Nordrhein-Westfalen, Rheinland-Pfalz, Saarland, Schleswig-Holstein], Druck A. Braunschweig: Westermann, 2019 — ISBN 978-3-14-126324-4
- [Cari22] Caridade, Cristina M. R.: GeoGebra Augmented Reality: Ideas for Teaching and Learning Math. In: Yilmaz, F.; Queiruga-Dios, A.; Santos Sánchez, M. J.; Rasteiro, D.; Gayoso Martínez, V.; Martín Vaquero, J. (Hrsg.): *Mathematical Methods for Engineering Applications, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics.* Bd. 384. Cham: Springer International Publishing, 2022 — ISBN 978-3-030-96400-9, S. 235–244
- [Cerv00] Cervone, Davide P.: *The Hypercube: Projections & Slicing.* URL <http://www.tombanchoff.com/the-hypercube-projections--slicing.html>. - abgerufen am 2023-06-04. — THOMAS F. BANCHOFF
- [DHM82] Davis, Philip J.; Hersh, Reuben; Marchisotto, R. A.: Four dimensional intuition. In: *The mathematical experience.* Boston: Houghton Mifflin, 1982 — ISBN 978-0-395-32131-7, S. 400–405
- [Flat00] Flatland: The Movie: *Flatland: The Movie.* URL <https://round-drum-w7xh.squarespace.com/our-story>. - abgerufen am 2023-06-04. — Flatland: The Movie
- [FK22] Florian, Lena; Kortenkamp, Ulrich: Virtuelle Welten im Mathematikunterricht – Lernumgebungen in erweiterter Realität. In: Pinkernell, G.; Reinhold, F.; Schacht, F.; Walter, D. (Hrsg.): *Digitales*

- Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2022 — ISBN 978-3-662-65280-0, S. 137–162
- [FR16] Franke, Marianne; Reinhold, Simone: *Didaktik der Geometrie in der Grundschule, Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. 3. Auflage. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2016 — ISBN 978-3-662-47265-1
- [HB22] Hartmann, Christian; Bannert, Maria: Lernen in virtuellen Räumen: Konzeptuelle Grundlagen und Implikationen für künftige Forschung. In: *MedienPädagogik: Zeitschrift für Theorie und Praxis der Medienbildung* Bd. 47 (2022), S. 373–391
- [Heil20] Heil, Cathleen: *The Impact of Scale on Children's Spatial Thought: A Quantitative Study for Two Settings in Geometry Education*, *Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2020 — ISBN 978-3-658-32647-0
- [Hüb00] Hübner, G. (Hrsg.): *Mathebaum: Mathematik für Grundschulen*. 4, [Schülerbd.]. Nordrhein-Westfalen. Hannover: Schroedel, 2000 — ISBN 978-3-507-75004-3
- [Jera16] Jerald, Jason: *The VR book: human-centered design for virtual reality*, *ACM books*. New York] [San Rafael, California: Association for computing machinery Morgan & Claypool publishers, 2016 — ISBN 978-1-970001-12-9
- [KSW00] Kaufmann, Hannes; Schmalstieg, Dieter; Wagner, Michael: Construct3D: A Virtual Reality Application for Mathematics and Geometry Education. In: *Education and Information Technologies* Bd. 5 (2000), S. 263–276
- [Kmk22a] KMK: *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 i.d.F. vom 23.06.2022*, 2022
- [Kmk22b] KMK: *Bildungsstandards für das Fach Mathematik. Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA). Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 und vom 04.12.2003 i.d.F. vom 23.06.2022*, 2022
- [Kult17] Kultusministerkonferenz: *Strategie der Kultusministerkonferenz „Bildung in der digitalen Welt“*, 2017

- [Kult21] Kultusministerkonferenz: *Lehren und Lernen in der digitalen Welt - die ergänzende Empfehlung zur Strategie „Bildung in der digitalen Welt“*, 2021
- [LW14] Lee, Elinda Ai-Lim; Wong, Kok Wai: Learning with desktop virtual reality: Low spatial ability learners are more positively affected. In: *Computers & Education* Bd. 79 (2014), S. 49–58
- [Maie99] Maier, Peter Herbert: *Räumliches Vorstellungsvermögen: ein theoretischer Abriß des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen; mit didaktischen Hinweisen für den Unterricht*. 1. Aufl. Donauwörth: Auer, 1999 — ISBN 978-3-403-03090-4
- [MMP22] Mayer, Richard E.; Makransky, Guido; Parong, Jocelyn: The Promise and Pitfalls of Learning in Immersive Virtual Reality. In: *International Journal of Human–Computer Interaction* (2022), S. 1–10
- [MR14] McKenney, Susan; Reeves, Thomas C.: Educational Design Research. In: Spector, J. M.; Merrill, M. D.; Elen, J.; Bishop, M. J. (Hrsg.): *Handbook of Research on Educational Communications and Technology*. New York, NY : Springer New York, 2014 — ISBN 978-1-4614-3184-8, S. 131–140
- [MBK20] Mulders, Miriam; Buchner, Josef; Kerres, Michael: A Framework for the Use of Immersive Virtual Reality in Learning Environments. In: *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET)* Bd. 15 (2020), Nr. 24, S. 208
- [Nied17] Niedersächsisches Kultusministerium: *Mathematik. Kerncurriculum für die Grundschule: Schuljahrgänge 1-4*. Hannover, 2017
- [Nied20a] Niedersächsisches Kultusministerium: Kerncurriculum für die Hauptschule - Mathematik.
- [Nied20b] Niedersächsisches Kultusministerium: Kerncurriculum für die Realschule - Mathematik.
- [Phae21] *phaeno - phaeno*. URL <https://www.phaeno.de/>. - abgerufen am 2023-06-06. — phaeno.de
- [Plom13] Plomp, Tjeerd: Educational Design Research: An Introduction. In: Plomp, T.; Nieveen, N. (Hrsg.): *Educational Design Research: Illustrative Cases*. Enschede: SLO, Netherlands Institute for Curriculum Development, 2013, S. 11–52

- [SW20] Safadel, Parviz; White, David: Effectiveness of Computer-Generated Virtual Reality (VR) in Learning and Teaching Environments with Spatial Frameworks. In: *Applied Sciences* Bd. 10 (2020), Nr. 16, S. 5438
- [SBŠD23] Sikl, Radovan; Brücknerová, Karla; Švedová, Hana; Dechterenko, Filip; Ugwitz, Pavel; Chmelík, Jiří; Svatoňová, Hana; Juřík, Vojtěch: *Learning in virtual reality: Who benefits and who doesn't?* (preprint): PsyArXiv, 2023
- [Schm06] Schmidt-Thieme, Barbara: „Lieber Squarry“ - Schüler reflektieren in Briefen über Mathematik. In: Rathgeb-Schnierer, E.; Schütte, S. (Hrsg.): *Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht; Festschrift für Sybille Schütte zum 60. Geburtstag*. 1. Aufl., [Nachdr.]. München Düsseldorf Stuttgart : Oldenbourg, 2006 — ISBN 978-3-486-00033-7
- [SR02] Schmidt-Thieme, Barbara; Rosebrock, Stephan: Flächenland - Ein mehrdimensionaler Roman. In: *Karlsruher pädagogische Beiträge* Bd. 53 (2002), S. 27–49
- [Sick19] Sickel, Jamie L.: The Great Media Debate and TPACK: A Multidisciplinary Examination of the Role of Technology in Teaching and Learning. In: *Journal of Research on Technology in Education* Bd. 51 (2019), Nr. 2, S. 152–165
- [SDW22] Sommer, Julian; Dilling, Frederik; Witzke, Ingo: Die App „Dreitafelprojektion VR“ – Potentiale der Virtual Reality-Technologie für den Mathematikunterricht. In: Dilling, F.; Pielsticker, F.; Witzke, I. (Hrsg.): *Neue Perspektiven auf mathematische Lehr-Lernprozesse mit digitalen Medien, MINTUS – Beiträge zur mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2022 — ISBN 978-3-658-36763-3, S. 255–287
- [SRGW23] Schäfer, Caterina; Rohse, Dorina; Gittinger, Micha; Wiesche, David: Virtual Reality in der Schule: Bedenken und Potenziale aus Sicht der Akteur:innen in interdisziplinären Ratingkonferenzen. In: *MedienPädagogik: Zeitschrift für Theorie und Praxis der Medienbildung* Bd. 51 (2023), S. 1–24
- [TFH22] Tahiri, Yasamin; Florian, Lena; Hartmann, Mutfried: Intuitive Werkzeuge gestalten: Designprinzipien zur Entwicklung einer dynamischen Geometriesoftware im virtuellen Raum. In: *MedienPädagogik: Zeitschrift für Theorie und Praxis der Medienbildung* Bd. 47 (2022), S. 94–117

- [Tahi22] Tahiri, Yasamin: Effektivität des Einsatzes von Virtual Reality & Augmented Reality im Geometrieunterricht. In: Henning, P. A.; Striewe, M.; Wölfel, M. (Hrsg.): *20. Fachtagung Bildungstechnologien (DELFI), Lecture Notes in Informatics (LNI)*. Bonn: Gesellschaft für Informatik, 2022
- [Wang09] Wang, Ranxiao Frances: A Case Study on Human Learning of Four-Dimensional Objects in Virtual Reality: Passive Exploration and Display Techniques. In: *2009 Fourth International Conference on Frontier of Computer Science and Technology*. Shanghai, TBD, China: IEEE, 2009 — ISBN 978-1-4244-5466-2, S. 519–523
- [WS20] Wichers, Julia; Strunk, Sandra: Auf alle Fälle ein Fall. In: *Hildesheimer Beiträge zur Schul- und Unterrichtsforschung*. Bd. 2. Hildesheim: Universitätsverlag Hildesheim, 2020.