Der goldene Schnitt und Polynome 4. Grades

A. Zitterbart
(Schwarzwaldgymnasium Triberg)

ae.zitterbart@t-online.de

Einleitung

Tor Andersen vom Norwegian Centre for Mathematics Education hatte beim Global Teachers Meeting der Firma Casio einen Zusammenhang zwischen der Zahl φ des goldenen Schnitts und einem Polynom 4. Grades anhand eines konkreten Beispiels vorgestellt und die Teilnehmer ermuntert, diesen Zusammenhang auch für weitere Polynome 4. Grades zu untersuchen. Zwischen Schriftlichem und Mündlichem Abitur machte sich eine Gruppe von vier Schülerinnen und Schülern des Schwarzwald-Gymnasiums Triberg daran, diesen Zusammenhang allgemein mithilfe des CAS ClassPad nachzuweisen.

1. Ein Beispiel mit konkreten Zahlen

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^4 - 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + x + 2$. Durch die beiden Wendepunkte wird eine Gerade g gelegt (Abb. 2). Das CAS liefert als Nullstellen von f'':

solve(f2(x)=0,x)

$$\left\{x=\frac{-\sqrt{33}}{12}+\frac{3}{4},\, x=\frac{\sqrt{33}}{12}+\frac{3}{4}\right\}$$

approx(

{x=0.2712864461,x=1.228713554}

Abbildung 1

Für die Untersuchung des konkreten Beispiels genügt es zunächst, mit den dezimalen Näherungen zu arbeiten: $x = 0.271... \Rightarrow xw1$ bzw. $x = 1.228... \Rightarrow xw2$ und $f(xw1) = 2.386... \Rightarrow yw1$ bzw. $f(xw2) = 2.962... \Rightarrow yw2$.

Die Ergebnisse werden in den angegebenen Variablen abgelegt. Die Gerade g schneidet f in zwei weiteren Punkten (siehe Abb. 2). Man erhält damit drei Geradenabschnitte, in denen die Zahl φ des Goldenen Schnitts enthalten ist. Für die Steigung m von g gilt

$$m = \frac{yw2 - yw1}{xw2 - xw1} = 0.625.$$

Der y-Achsenabschnitt von g kann bestimmt werden durch $solve(yw1 = m \cdot xw1 + t, t)$. Hieraus folgt $b = 2.194$ und somit $g(x) = 0.625 \cdot x + 2.194$ Die Berechnung der Schnittstellen von f und g mit dem Befehl $solve(f(x) = g(x))$ liefert: $x = xw1$, $x = xw2$, $x = -0.320$ und $x = 1.820$.

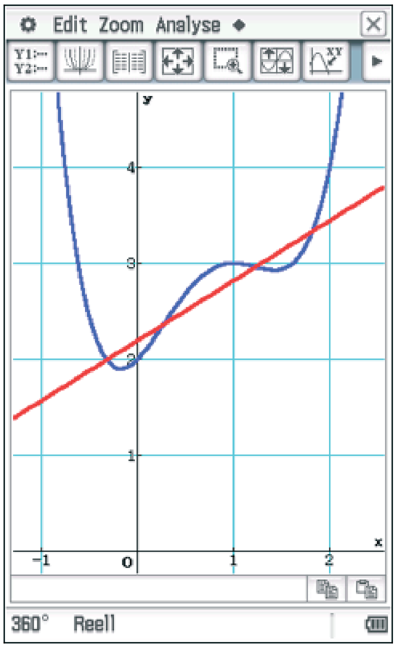

Abbildung 2

Nun wird der Abstand d zwischen den Wendepunkten und der Abstand a zwischen dem linken Schnittpunkt und dem linken Wendepunkt bestimmt:

$$\sqrt{(yw2 - yw1)^2 + (xw2 - xw1)^2} \Rightarrow d$$

Das CAS liefert: $d = 1.129...$.

$$\sqrt{(yw2 - f(-0.320...)^2 + (xw2 - (-0.320...)^2} \Rightarrow a$$

Das CAS liefert: $a = 0.697...$. Als Verhältnis zwischen den beiden Abständen erhält man: $\frac{d}{a} = 1.618...$ und $\frac{a}{d} = 0.618...$. Diese beiden Verhältniszahlen kommen auch im Zusammenhang mit dem Goldenen Schnitt vor.

2. Goldener Schnitt

Eine Strecke der Länge 1 wird im Verhältnis des Goldenen Schnitts geteilt, wenn für die beiden Abschnitte x und $1-x$ gilt: $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$. Als Lösungen dieser Gleichung erhält man: $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $x = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ mit den dezimalen Näherungen: $x = 0.618...$ und $x = -1.618...$. Die erste Lösung bezeichnet man mit dem griechischen Buchstaben φ, den Betrag der zweiten Lösung als Φ.

3. Allgemeiner Fall

Das allgemeine Polynom 4. Grades hat die Gestalt $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$. Um die Komplexität der im Folgenden zu analysierenden Terme zu reduzieren, kann man zunächst überlegen, dass der Parameter e nur eine vertikale Verschiebung des Schaubildes bewirkt, also keinen Einfluss auf das zu untersuchende Verhältnis der beiden Geradenabschnitte hat. Durch eine Division durch den Leitkoeffizienten a, was geometrisch einer vertikalen Streckung bzw. Stauchung des Graphen entspricht, wird dieses Verhältnis ebenfalls nicht geändert. Demnach genügt es für den allgemeinen Fall Polynome (mit neu gewählten Parametern) der Gestalt $f(x) = x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x$ zu betrachten und aufgrund des Strahlensatzes die Projektion der Verhältnisses auf die x-Achse zu untersuchen. Der ClassPad liefert als Nullstellen der 2. Ableitung: $x = \frac{-(3 \cdot b \pm \sqrt{9 \cdot b^2 - 24 \cdot c})}{12}$ (vgl. Abb. 3).

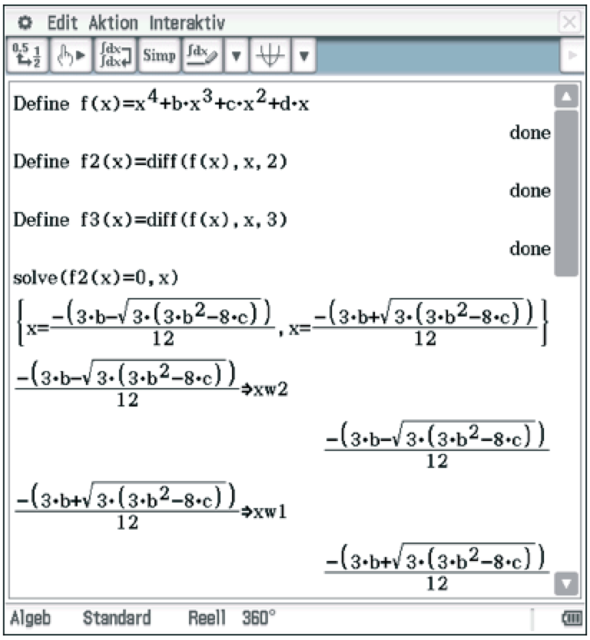

Abbildung 3

Mit Hilfe der dritten Ableitung werden die Nullstellen der zweiten Ableitung als Wendestellen identifiziert. Die Gerade g durch die beiden Wendepunkte erhält man mit der Punkt-Steigungsformel der Geradengleichung. Schneidet man g und f, so erhält man außer den Wendestellen die in Abb. 4 abgebildeten Lösungen: Die links neben $xw1$ liegende Schnittstelle ist L[4], sie wird als $xs1$ gespeichert. Für das Verhältnis der beiden entsprechenden Abstände auf der x-Achse liefert der ClassPad (vgl. Abb. 5) den Term:

$$\frac{2 \cdot \sqrt{3 \cdot (3 \cdot b^2 - 8 \cdot c)}}{\sqrt{15 \cdot (3 \cdot b^2 - 8 \cdot c)} - \sqrt{3 \cdot (3 \cdot b^2 - 8 \cdot c)}}$$

Dieser muss manuell umgeformt werden zu $\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{15}-\sqrt{3}}$. Mit dem simplify-Befehl erhält man $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

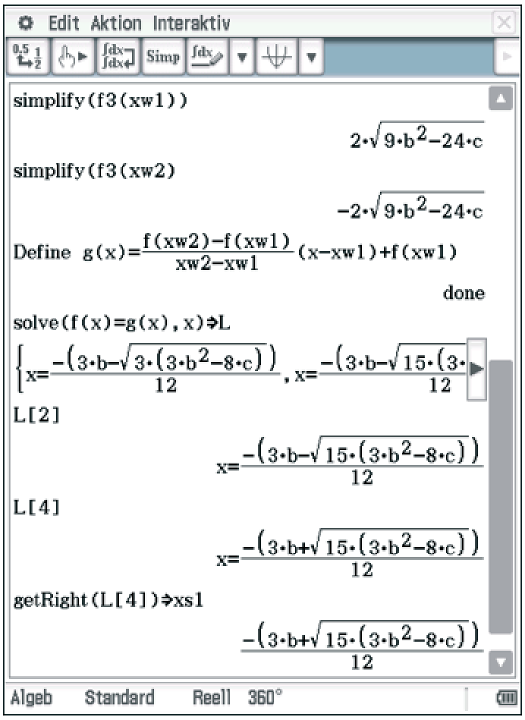

Abbildung 4

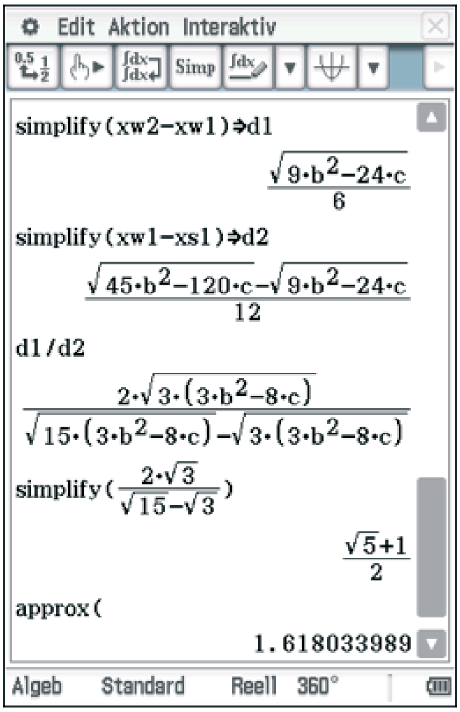

Abbildung 5

4. Weiterführende Gedanken

Bei einem späteren Treffen mit Tor Andersen erwähnte er, dass auch die Flächen, die durch die Gerade durch die Wendepunkte und den Funktionsgraph entstehen, in einem besonderen Verhältnis zueinander stehen. Zunächst wird dieser Zusammenhang wieder mit einem konkreten Beispiel erkundet (vgl. Abb. 8).

Die innere Fläche ist beim konkreten Beispiel doppelt so groß wie jede der Außenflächen. Dieser Zusammenhang für die Flächen gilt allgemein. Vertraut man bei der Überprüfung allerdings zu stark auf die Macht des CAS, so werden die Terme sehr schnell unübersichtlich (vgl. Abb. 9).

Man könnte jetzt wie bei dem konkreten Beispiel weiter rechnen und würde dann das Ergebnis des Screenshots aus Abb. 6 erhalten.

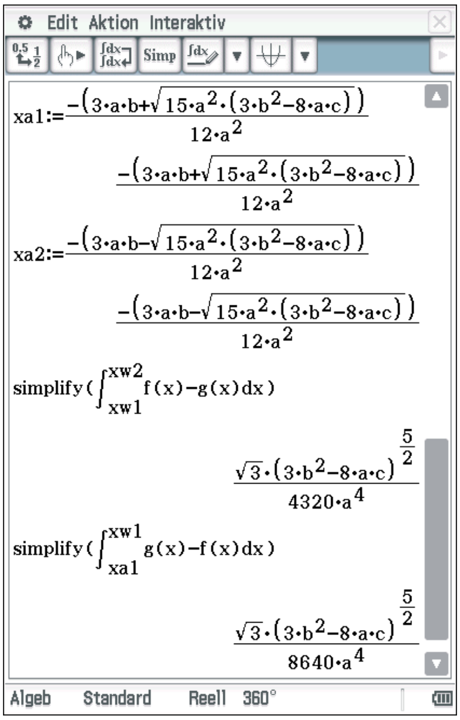

Abbildung 6

Ein anderer Zugang besteht darin zu erkunden durch welche Transformationen die allgemeine ganzrationale Funktion 4. Grades aus einfacheren Funktionen 4. Grades entsteht. Unmittelbar einsichtig ist, dass man sich auf Polynome 4. Grades der Gestalt $f(x) = x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ beschränken kann, weil aus ihnen durch vertikale Streckung/Stauchung das allgemeine Polynom 4. Grades entsteht und sich dabei Wendestellen und die Flächenverhältnisse nicht verändern. Diese Polynome können durch eine horizontale Verschiebung aus Polynomen der Gestalt $f(x) = x^4 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ entstehen (vgl. Abb. 7).

Man kann sich bei der Untersuchung des Zusammenhangs also auf Polynome der Gestalt $f(x) = x^4 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ beschränken (vgl. Abb. 10).

5. Ergänzung

Polynome der Gestalt $f(x) = x^4 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ könnten aus Polynomen der Gestalt $f(x) = x^4 + c \cdot x^2$ durch „additive Ergänzung um einen linearen Term“entstehen. Dabei verändern sich die Wendestellen nicht und die Gerade durch die Wendepunkte wird durch den gleichen linearen Term ergänzt, so dass sich die Fläche zwischen Funktionsgraph und Wendepunktgerade durch diese Transformation nicht verändert. Denn wenn x_1 und x_2 die beiden Wendestellen sind, gilt für die Gerade durch die beiden Wendepunkte vor der Transformation:

$$g(x) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) + f(x_1)$$

Nach der Transformation gilt:

$$g_{neu}(x) = \frac{[f(x_1) + d \cdot x_1 + e] - [f(x_2) + d \cdot x_2 + e]}{(x_1 - x_2) \cdot (x - x_1)^{-1}} + [f(x_1) + d \cdot x_1 + e]$$

$$\Rightarrow g_{neu}(x) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) + f(x_1) + d \cdot x_1 + e$$

Es genügt also den Zusammenhang zwischen den Flächen für Polynome 4. Grades der Gestalt $f(x) = x^4 + c \cdot x^2$ zu untersuchen. Die Funktionsgraphen dieser Polynome sind aber symmetrisch zur y-Achse. Daraus folgt sofort, dass die beiden Außenflächen gleich groß sind.

Dieser Beitrag wurde mit freundlicher Genehmigung von CASIO Europe GmbH für den Nachdruck im CAR zur Verfügung gestellt

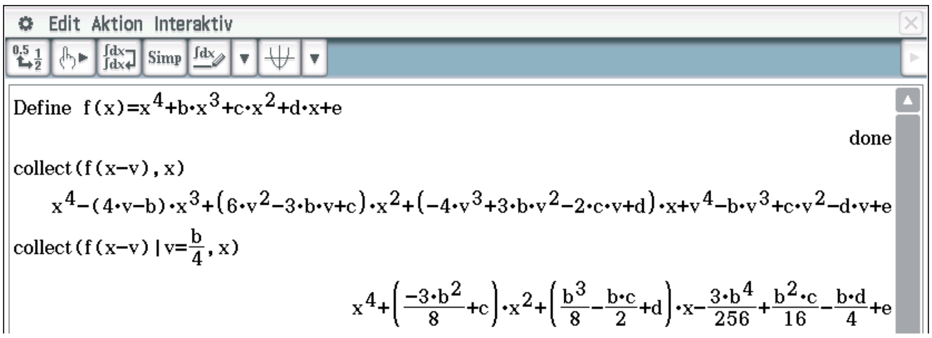

Abbildung 7

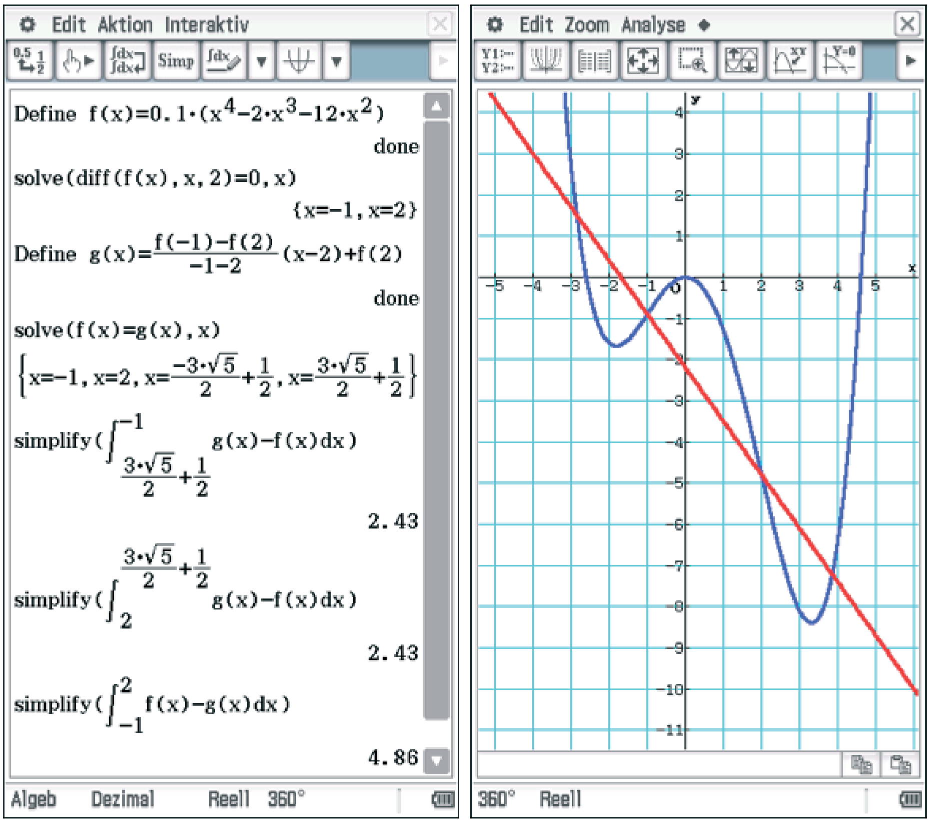

Abbildung 8

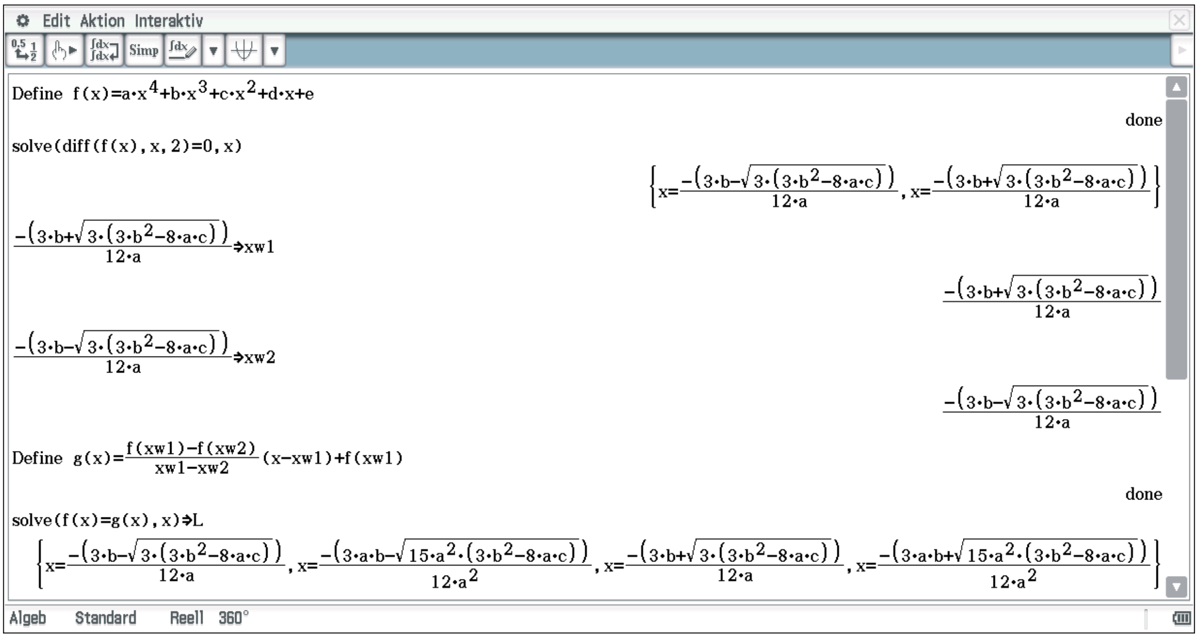

Abbildung 9

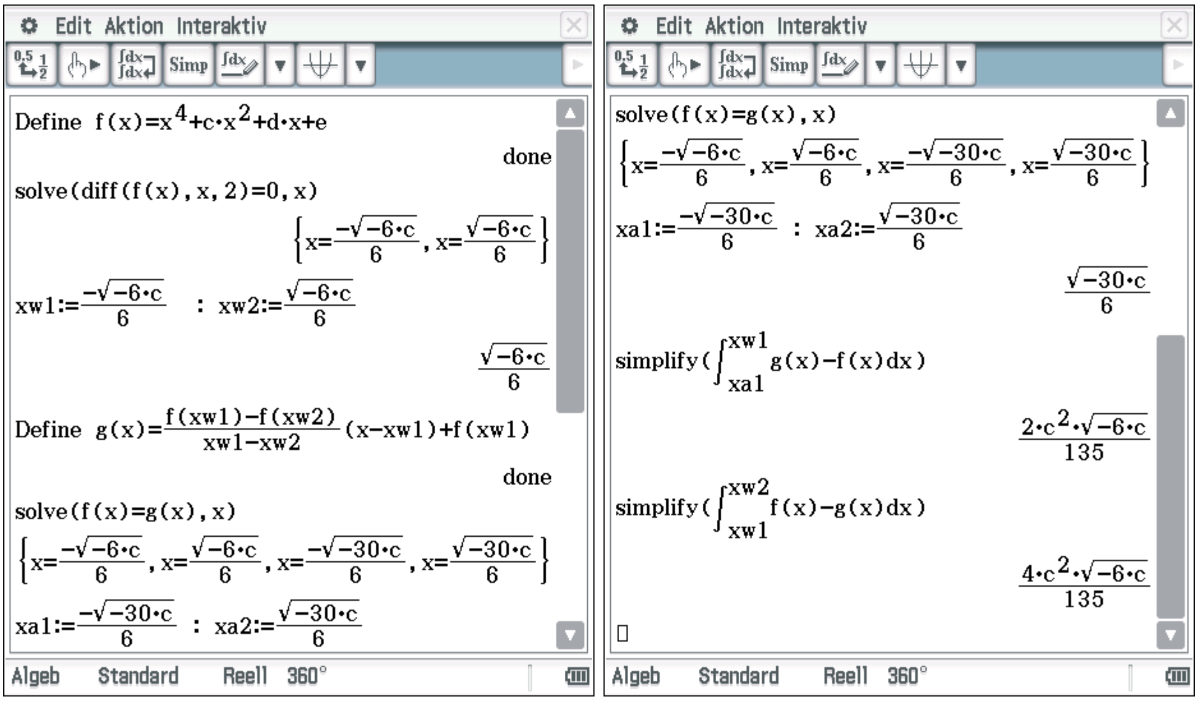

Abbildung 10