

## Tropische Geometrie

**Thomas Markwig**  
(Technische Universität Kaiserslautern)

keilen@mathematik.uni-kl.de



Die tropische Geometrie ist ein neues Gebiet, das sich in den vergangenen Jahren als ein effizientes Werkzeug im Bereich der enumerativen Geometrie erwiesen hat (siehe z. B. [GM08]). Methoden der tropischen Geometrie haben zu neuen Algorithmen für die Elimination von Variablen geführt (siehe z. B. [StY08]). In der Optimierung und Kontrolltheorie ist man an der tropischen Geometrie als einer Art algebraischen Geometrie über der Max-Plus-Algebra interessiert (siehe z. B. [CGQ99]). So sehr wie sich die angesprochenen mathematischen Gebiete unterscheiden, unterscheiden sich auch ihre Definitionen des Begriffs der *tropischen Varietät* auf den ersten Blick. Für enumerative Fragen betrachtet man tropische Kurven am Besten in parametrisierter Form, während sich für die Elimination am ehesten ein impliziter Standpunkt eignet, und in vielen anderen Situationen reicht eine rein kombinatorische Beschreibung aus. Die verschiedenen, auf diese Weise definierten Klassen von Objekten stimmen in großen Teilen überein, ohne vollkommen identisch zu sein. Für die vorliegende Arbeit nehmen wir im Wesentlichen den impliziten Standpunkt ein. Unterwegs werden wir einige Aspekte der kombinatorischen Struktur erläutern, die allen Zugängen gemein ist, und wir werden den rechnerischen Fragen der tropischen Geometrie unser besonderes Augenmerk schenken.

Man kann sich die tropische Geometrie als einen Schatten der klassischen algebraischen Geometrie vorstellen, der interessante Information der klassischen Objekte widerspiegelt, aber leichter zu verstehen ist und den Einsatz neuer Methoden erlaubt. Der Grundkörper, über dem die klassischen Objekte leben, sollte algebraisch abgeschlossen sein und eine nicht-archimedische Bewertung besitzen. Prototyp eines solchen Körpers sind die *Puiseux-Reihen*

$$a = c_0 \cdot t^{q_0} + c_1 \cdot t^{q_1} + c_2 \cdot t^{q_2} + \dots$$

wobei die  $c_i \in \mathbb{C}$  komplexe Zahlen sind und  $q_0 < q_1 < q_2 < \dots$  eine streng monoton steigende Folge rationaler Zahlen ist, deren Nenner beschränkt ist.  $t$  ist eine Unbestimmte und die Ordnung einer Puiseux-Reihe

$$\text{ord}(a) = q_0$$

liefert eine nicht-archimedische Bewertung auf dem Körper  $\mathbb{K}$  aller Puiseux-Reihen. Wir nennen

$$\text{lc}(a) = c_0$$

den *Leitkoeffizienten* der Puiseux-Reihe  $a$ . Die Bewertung ist eine Abbildung  $\text{ord} : \mathbb{K}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , die sich auf natürliche Weise fortsetzen läßt zu einer Abbildung

$$\text{ord} : (\mathbb{K}^*)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

durch

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto (\text{ord}(a_1), \dots, \text{ord}(a_n)).$$

Ihr Bild ist  $\mathbb{Q}^n$  und ist deshalb dicht in  $\mathbb{R}^n$ .

Ein Ideal

$$0 \neq I \leq \mathbb{K} [x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$$

im Ring der Laurent-Polynome über  $\mathbb{K}$  definiert eine klassische algebraische Varietät

$$V(I) = \{ \underline{a} \in (\mathbb{K}^*)^n \mid f(\underline{a}) = 0 \forall f \in I \}$$

im Torus  $(\mathbb{K}^*)^n$ . Der topologische Abschluss des Bildes dieser Varietät  $V(I)$  unter der Abbildung  $\text{ord}$  nennen wir die zu  $I$  assoziierte *tropische Varietät*

$$\text{Trop}(I) = \overline{\text{ord}(V(I))}.$$

Betrachten wir als einfachstes Beispiel die Gerade in  $(\mathbb{K}^*)^2$ , die durch folgende Gleichung gegeben wird:

$$x + y + 1 = 0.$$

Wenn ein Punkt mit den Koordinaten

$$(c_0 \cdot t^{\omega_1} + h.o.t., d_0 \cdot t^{\omega_2} + h.o.t.)$$

auf der Geraden liegt, dann müssen insbesondere die Terme kleinster Ordnung in

$$(c_0 \cdot t^{\omega_1} + h.o.t.) + (d_0 \cdot t^{\omega_2} + h.o.t.) + 1 \quad (1)$$

verschwinden. Dies zeigt, dass einer der folgenden Fälle eintritt:

$$\omega_1 = \omega_2 \leq 0, \quad \omega_1 = 0 \leq \omega_2 \quad \text{oder} \quad \omega_2 = 0 \leq \omega_1.$$

Die tropische Kurve, die zu  $\langle x + y + 1 \rangle$  assoziiert ist, ist deswegen folgender stückweise linearer Graph:



Im Allgemeinen ist unsere Definition nicht allzu hilfreich, wenn es darum geht, die geometrische Struktur einer tropischen Varietät zu verstehen oder sie gar zu berechnen. Aber das Beispiel zeigt eine wichtige Eigenschaft, die Punkte  $\underline{\omega} \in \text{Trop}(I)$  in Bezug auf die Polynome  $f \in I$  erfüllen müssen. Wenn wir den Punkt  $(\omega_1, \omega_2)$  als Gewichtsvektor für die Monome von  $f$  auffassen (z. B. hat das Monom  $x^i \cdot y^j$  dann den gewichteten Grad  $i \cdot \omega_1 + j \cdot \omega_2$ ), dann muss der Term von niedrigstem gewichteten Grad von  $x + y + 1$  entweder  $x + y$  oder  $x + 1$  oder  $y + 1$  oder  $x + y + 1$  sein. Er wird ganz sicher *kein* Monom sein, da dann keine Auslöschung der Terme niedrigster Ordnung in (1) möglich wäre. Diese Feststellung verallgemeinert sich wie folgt: für einen Punkt  $\underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$  definieren wir die *t-Leitform*

$$\text{t-in}_{\underline{\omega}}(f) = \sum_{\substack{\text{ord}(a_{\alpha}) + \langle \alpha, \underline{\omega} \rangle \\ \text{minimal}}} \text{lc}(a_{\alpha}) \cdot \underline{x}^{\alpha}$$

von

$$f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \cdot \underline{x}^{\alpha},$$

wobei wir die übliche Multi-Index-Schreibweise verwenden, und wir nennen

$$\text{t-in}_{\underline{\omega}}(I) = \langle \text{t-in}_{\underline{\omega}}(f) \mid f \in I \rangle \trianglelefteq \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$$

das *t-Leitideal* von  $f$ . Damit ein Punkt  $\underline{\omega}$  zur tropischen Varietät  $\text{Trop}(I)$  gehört, ist es nun offensichtlich notwendig, dass keine *t-Leitform* eines Elementes von  $I$  ein Monom ist. In der Tat ist die Umkehrung dieser Aussage ebenfalls richtig und sie ist als *Lifting Lemma* bekannt.

### Satz 1 (Lifting Lemma)

$$\text{Trop}(I) = \{ \underline{\omega} \mid \text{t-in}_{\underline{\omega}}(I) \text{ ist monomfrei} \}.$$

Im Fall, dass  $I$  ein Hauptideal ist, geht der Beweis im Wesentlichen auf Newton zurück und wurde für allgemeinere Grundkörper von Kapranov bewiesen. Ein erster Beweis des allgemeinen Falls stammt von Sturmfels und Speyer. Eine Lücke in diesem Beweis hat eine ganze Reihe neuer Beweise mit sehr unterschiedlichen Methoden inspiriert: Draisma verwendet affinoiden Algebren, Katz flache Deformationen über Bewertungsringen, und Payne reduziert das allgemeine Problem auf den Hauptidealfall durch Schnitte und Projektionen, und sein Beweis funktioniert für jeden beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper mit nicht-archimedischer Bewertung.

In [JMM08] geben wir einen *konstruktiven* Beweis des Lifting Lemmas über den Puiseux-Reihen. Dabei reduzieren wir den allgemeinen Fall auf den null-dimensionalen und verwenden dann eine Raumkurvenversion des Newton-Puiseux-Algorithmus nach Maurer.

*Konstruktiv* meint dabei, dass wir zu gegebenem rationalen Punkt  $\underline{\omega}$  in der rechten Seite von Satz 1 einen Punkt  $p$  in  $V(I)$  mit  $\text{ord}(p) = \underline{\omega}$  konstruieren. Die Algorithmen, die sich aus dem Beweis ergeben, sind in der SINGULAR-Bibliothek `tropical.lib` implementiert und verwenden neben dem Computeralgebrasystem SINGULAR das Programm `gfan`. Bei den Eingabedaten für die SINGULAR-Prozeduren müssen wir uns auf Elemente im Polynomring  $\mathbb{Q}(t)[x_1, \dots, x_n]$  beschränken, und wir können nur eine endliche Anzahl von Termen von  $p$  berechnen. Dies reicht aber aus, um viele interessante Beispiele zu rechnen. Wann immer dies notwendig ist, werden Körpererweiterungen von  $\mathbb{Q}$  berechnet.

Der Algorithmus besteht im Wesentlichen aus zwei Schritten. Wenn  $\dim(I) = d$ , so wählen wir im ersten Schritt  $d$  generische Hyperebenen im  $\mathbb{K}^n$ , deren Tropikalisierung durch  $\underline{\omega}$  geht, und fügen dem Ideal ihre definierenden Linearformen hinzu. Auf diese Weise erhalten wir ein nulldimensionales Ideal. Fassen wir  $t$  nun als Variable auf, so definiert das neue Ideal einen Raumkurvenkeim im Ursprung, und wir können den Newton-Puiseux-Algorithmus für Raumkurven anwenden. Für diesen zweiten Schritt des Algorithmus wählen wir eine Nullstelle

$$\underline{u} \in V(\text{t-in}_{\underline{\omega}}(I)) \cap (\mathbb{C}^*)^n$$

und transformieren das erweiterte Ideal durch

$$x_i \mapsto t^{\omega_i} \cdot (u_i + x_i)$$

in ein Ideal  $I'$ . Wählen wir nun einen Punkt in der tropischen Varietät von  $I'$ , so können wir rekursiv fortfahren und erhalten eine Lösung der Form

$$(u_1 \cdot t^{\omega_1} + \text{h.o.t.}, \dots, u_n \cdot t^{\omega_n} + \text{h.o.t.}).$$

Natürlich gibt es dabei einige technische Probleme, die beachtet werden müssen.

Im Algorithmus müssen wir immer wieder Punkte in den tropischen Varietäten der transformierten Ideale berechnen. Das ist im Allgemeinen ein schwieriges Unterfangen. Falls die Eingabedaten polynomial in  $t$  und in  $\underline{x}$  sind, dann kann man zunächst einfach über dem Ring  $\mathbb{C}[t^{\pm 1}, \underline{x}^{\pm 1}]$  der Laurent-Polynome arbeiten und die resultierende tropische Varietät mit der Hyperebene  $t = 1$  schneiden. Die analoge Aussage zum Lifting Lemma für den Fall von Polynomen in  $\mathbb{C}[t^{\pm 1}, \underline{x}^{\pm 1}]$  zeigt unmittelbar, dass die tropische Varietät im Kodimension-Eins-Skelett des Gröbnerfächers des Ideals enthalten ist. Sie erbt sogar dessen polyedrische Struktur.

**Satz 2 (Bieri-Groves, Sturmfels)** Wenn  $I$  ein  $d$ -dimensionales Primideal ist, dann ist  $\text{Trop}(I)$  ein rein  $d$ -dimensionaler rationaler polyedrischer Komplex, der zusammenhängend in Kodimension 1 ist.

Ein wenig effizienter Algorithmus zur Berechnung einer tropischen Varietät ergäbe sich aus der Berechnung des Gröbnerfächers mit anschließender Prüfung jedes Kegels, ob er zur tropischen Varietät gehört. Es gibt jedoch deutlich bessere Algorithmen (siehe etwa [BJS<sup>+</sup>07]).

Die Kernidee besteht dabei darin, eine *tropische Basis* des Ideals zu finden. Dabei handelt es sich um ein Erzeugendensystem  $f_1, \dots, f_k$  des Ideals  $I$  mit der Eigenschaft, dass die tropische Varietät  $\text{Trop}(I)$  der Schnitt der tropischen Hyperflächen  $\text{Trop}(f_1), \dots, \text{Trop}(f_k)$  ist. Diejenigen, die mit algebraischer Geometrie vertraut sind, mag es überraschen, dass dies nicht für jedes Erzeugendensystem von  $I$  gilt.

Die Kenntnis einer tropischen Basis ist hilfreich, da die tropische Hyperfläche  $\text{Trop}(f)$  auf einfache Weise am Polynom  $f$  abgelesen werden kann. In kombinatorischer Hinsicht ist sie durch die von  $f$  induzierte Unterteilung des Newton-Polytops von  $f$  festgelegt. Da  $\text{Trop}(f)$  der Ort der Nicht-Differenzierbarkeit der stückweise linearen Funktion

$$\text{trop}(f) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \underline{x} \mapsto \min\{\text{ord}(a_{\underline{\alpha}}) + \langle \underline{\alpha}, \underline{x} \rangle\}$$

ist, können wir  $\text{Trop}(f)$  in der Tat vollständig aus der Newton-Unterteilung rekonstruieren. Man beachte, dass der Ort der Nicht-Differenzierbarkeit genau aus den Punkten besteht, an denen das Minimum mindestens zweimal angenommen wird.

Wir wollen die oben angedeutete Konstruktion an einem Beispiel vorführen:

$$f = x^3 + y^3 + \frac{1}{t} \cdot xy + 1,$$

so dass

$$\text{trop}(f) = \min\{3x, 3y, -1 + x + y, 0\}.$$

Das Newton-Polygon ist die konvexe Hülle des Trägers von  $f$  (siehe Abb. 1, linke Seite). Man erweitert das Newton-Polygon in die dritte Dimension, indem man über einem Gitterpunkt  $\underline{\alpha}$  die Bewertung von  $a_{\underline{\alpha}}$  als Höhe abträgt. Die konvexe Hülle der Punkte, die wir erhalten, ist ein konvexes Polytop im  $\mathbb{R}^3$  (siehe Abb. 2). Projizieren wir die unteren Seiten dieses Polytops in die  $\underline{\alpha}$ -Ebene, so erhalten wir die Unterteilung des Newton-Polygons in Abb. 1, rechte Seite.

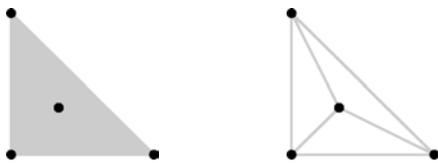


Abb. 1: Newton-Polygon

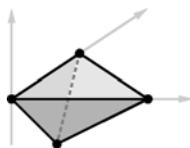


Abb. 2: Erweitertes Newton-Polygon

Die tropische Kurve  $\text{Trop}(f)$  ist dann dual zu dieser Unterteilung: Jedes zweidimensionale Polygon der Unterteilung entspricht einer Ecke der tropischen Kurve; zwei Ecken sind genau dann durch eine beschränkte Kante verbunden, wenn die zugehörigen Polygone in

der Unterteilung eine Seite gemeinsam haben; der Richtungsvektor der beschränkten Kante steht senkrecht auf der gemeinsamen Seite der Polygone; jede Seite eines Polygons der Unterteilung auf dem Rand des Newton-Polygons entspricht einer unbeschränkten Kante der tropischen Kurve und deren Richtungsvektor steht wieder senkrecht auf der Seite. Und schließlich ist die Ecke der tropischen Kurve, die zu dem Polygon mit den Eckpunkten  $(0, 0), (1, 1), (3, 0)$  gehört, durch das Gleichungssystem

$$0 = -1 + x + y = 3x \leq 3y$$

festgelegt. Entsprechendes gilt für die übrigen Ecken. Wir erhalten deshalb die Kurve:



Dies führt zu einem einfachen Algorithmus zum Berechnen von tropischen Hyperflächen und zum Zeichnen selbiger im Fall von ebenen Kurven und von Flächen im Raum. Der Algorithmus für ebene Kurven ist in der SINGULAR-Bibliothek `tropical.lib` implementiert und erzeugt `latex`-Code (Abb. 3 wurde auf diese Weise erzeugt).

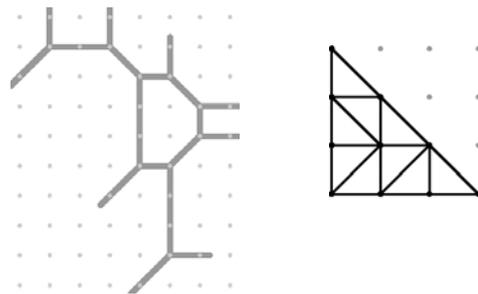


Abb. 3: tropische Kubik

Tropische Flächen im Raum darzustellen, ist ein delikateres Problem. Lars Allermanns Programm `TropicalSurfaces` bietet eine Implementierung hierfür (so wurden Abb. 4, 5, 6 erzeugt).

Die algebraische Gleichung von Abb. 6 ist

$$\begin{aligned} & t^2 + \frac{1}{t^8}x + t^3y + t^{14}xy + \frac{1}{16}yz + t^{10}xz \\ & + \frac{1}{t^{10}}x^2 + t^2y^2 + \frac{1}{t^{12}}z^2 + \frac{1}{t^{16}}xyz + t^3x^2y \\ & + \frac{1}{t^7}xy^2 + y^2z + \frac{1}{t^{14}}yz^2 + x^2z \\ & + \frac{1}{t^9}xz^2 + t^8x^3 + t^7y^3 + \frac{1}{t^4}z^3 = 0 \end{aligned}$$

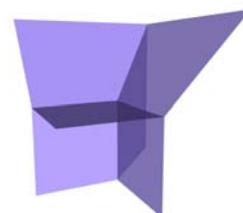


Abb. 4: tropische Ebene



Abb. 5: tropische Quadrik

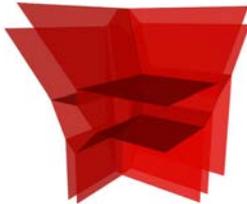


Abb. 6: tropische Kubik

Bisher haben wir beschrieben, was tropische Varietäten sind und wie Computeralgebra verwendet werden kann, um sie zu berechnen bzw. zu visualisieren. Wir wollen die Arbeit nun mit einem Beispiel dafür abschließen, wie Beziehungen zwischen algebraischen Varietäten und ihrer Tropikalisierung mit Mitteln der Computeralgebra bewiesen werden können.

Wir haben bereits gesehen, dass tropische Varietäten eine interessante geometrische und kombinatorische Struktur tragen und dass diese gewisse Eigenschaften der klassischen Varietäten widerspiegelt, z. B. die Dimension (siehe Satz 2). Es gibt aber noch weitere geometrische Eigenschaften, die unter hinreichend guten Bedingungen erhalten bleiben. Definiert ein Polynom  $f$  eine ebene Kurve vom Geschlecht  $g$ , so ist die zugehörige tropische Kurve ein Graph vom Geschlecht höchstens  $g$ . Im Fall  $g = 1$  ist die klassische Kurve eine elliptische Kurve, die bis auf Isomorphismus durch ihre  $j$ -Invariante, ein Element des Grundkörpers  $\mathbb{K}$ , bestimmt ist. Überraschenderweise spiegelt sich die Bewertung der  $j$ -Invariante in der Geometrie der tropischen Kurve wider, wenn diese einen Kreis hat.

**Satz 3 (Katz, Markwig, Markwig)** Definiert  $f$  eine ebene Kubik, so dass  $\text{Trop}(f)$  ein dreiwertiger Graph mit Kreis ist, dann ist die Bewertung der  $j$ -Invariante von  $V(f)$  das Negative der Gitterlänge des Kreises.

Ein Beispiel findet sich in Abb. 3. Die Gleichung der Kubik ist

$$f = t^7 \cdot (x^3 + y^3) + t^3 x^2 + t^2 \cdot (xy^2 + y^2) + t \cdot (x^2 y + x + y + 1) + xy = 0,$$

und aus dieser lässt sich die  $j$ -Invariante als Bruch zweier Polynome in  $t$  berechnen:

$$j(f) = \frac{1 - 24 \cdot t^2 + \dots + 2985984 \cdot t^{48}}{t^8 - 5 \cdot t^9 + \dots - 19683 \cdot t^{60}}.$$

Die Differenz ihrer Ordnungen ist die Bewertung der  $j$ -Invariante. In unserem Beispiel ergibt sich

$$\text{ord}(j(f)) = -8.$$

Die tropische Kurve, die durch  $f$  definiert wird, ist ein dreiwertiger Graph mit Kreis. Der Gitterlänge des Kreises erhalten wir, indem wir die Zahl der Gitterpunkte auf dem Kreis zählen. Es sind acht an der Zahl.

Das Ergebnis von Satz 3 wurde unter Einsatz der Computeralgebrasysteme `polymake`, `topcom` und `SINGULAR` bewiesen.<sup>1</sup>

## Literatur

- [BJS<sup>+</sup>07] Tristram Bogart, Anders Jensen, David Speyer, Bernd Sturmfels, Rekha Thomas, *Computing tropical varieties*, J. Symbolic Computation **42** (2007), 54–73, math.AG/0507563.
- [CGQ99] Guy Cohen, Stéphane Gaubert, Jean-Pierre Quadrat, *Max-plus algebra and system theory: Where we are and where to go now*, Annual Reviews in Control **23** (1999), 207–219.
- [GM08] Andreas Gathmann, Hannah Markwig, *Kontsevich's formula and the WDVV equations in tropical geometry*, Advances in Mathematics **217** (2008), 537–560.
- [JMM08] Anders Nedergaard Jensen, Hannah Markwig, Thomas Markwig, *An algorithm for lifting points in a tropical variety*, Collect. Math. **59** (2008), 129–165.
- [SS04] David Speyer, Bernd Sturmfels, *Tropical mathematics*, math.CO/0408099, 2004.
- [StY08] Bernd Sturmfels, Josephine Yu, *Tropical implicitisation and mixed fiber polytopes*, Software for Algebraic Geometry (Mike Stillman, Nobuki Takayama, and Jan Verschelde, eds.), I.M.A. Volumes in Mathematics and its Applications, vol. 148, Springer, 2008, pp. 111–132.

<sup>1</sup>Eine erweiterte Fassung des Artikels mit einer längeren Literaturliste findet sich auf meiner Webseite.