

Asymmetrische Evolutionsstrategien

Lars Hildebrand

Informatik I
Universität Dortmund
Otto-Hahn-Strasse 16
44221 Dortmund
lars.hildebrand@uni-dortmund.de

Die in dieser Dissertation entwickelten asymmetrischen Evolutionsstrategien sind Optimierverfahren, die den evolutionären Algorithmen zuzuordnen sind. Durch Entwicklung einer asymmetrischen Verteilungsfunktion und Realisierung eines zugehörigen Zufallszahlengenerators ist es möglich, die Leistungsfähigkeit und die Robustheit dieses Optimierverfahrens in Regionen zu bringen, die den evolutionären Algorithmen bisher vorenthalten waren. Insbesondere für ingenieurwissenschaftliche Problemstellungen bietet sich die asymmetrische Evolutionsstrategie als schnelles, einfach zu implementierendes und robustes Optimierverfahren an.

1 Einführung

In dieser Dissertation wird eine Klasse existierender, reellwertiger Optimierverfahren um einen Operator erweitert, der die Laufzeit der Optimierung drastisch reduziert bei gleichzeitig steigender Robustheit des Verfahrens. Bei der hier untersuchten Klasse der Optimierverfahren handelt es sich um die Evolutionsstrategien, die ihre allgemeine Anwendbarkeit für reellwertige Problemstellungen bereits seit Jahren eindrucksvoll unter Beweis stellen. Gerade im Bereich der ingenieurwissenschaftlichen Problemstellungen, die in der Regel durch eine reellwertige Beschreibung der Problemstellungen charakterisiert sind, werden die Evolutionsstrategien häufig eingesetzt, da sie ohne Verwendung mathematischer Eigenschaften der Problemstellung selbst (z. B. Stetigkeit oder Differenzierbarkeit) ein Optimum finden können.

2 Evolutionsstrategien und Anforderungen an eine bessere Variante

Evolutionsstrategien sind Optimierverfahren, die zur Lösung komplexer Optimierprobleme verwendet werden, bei denen klassische Verfahren aufgrund der Problemkomplexität oder fehlender mathematischer Eigenschaften des Optimierproblems nicht eingesetzt werden können. Das grundlegende Einsatzgebiet von Evolutionsstrategien ist die Klasse der reellwertigen Optimierprobleme. Evolutionsstrategien werden erfolgreich in vielen Teilbereichen der Ingenieurwissenschaften und Informatik eingesetzt.

Ausgehend von den klassischen Evolutionsstrategien, die Ende der 60'er und Anfang der 70'er Jahre von Rechenberg und Schwefel entwickelt wurden, sind die Evolutionsstrategien in vielen Richtungen erweitert worden. Mutationsoperationen wurden verändert bzw. neue Operatoren entwickelt. Evolutionsstrategien, die Eigenschaften der letzten Generationen verwenden, um Informationen über mögliche Gradienten oder geeignete Optimierrichtungen zu gewinnen, gehören ebenfalls zu diesen Neuentwicklungen. Ein Teil dieser Arbeiten beschäftigte sich mit einer speziellen Eigenschaft der Evolutionsstrategien, der Selbstadaptation. Selbstadaptation ermöglicht es einer Evolutionsstrategie, ein inneres Modell des Optimierproblems zu erlernen, um so einen möglichst schnellen Fortschritt bei der Optimierung zu erzielen. Von Bedeutung ist hierbei die Anzahl der Strategieparameter sowie die Skalierung der Parameter mit steigender Dimensionalität des Optimierungsproblems. Viele Varianten der Evolutionsstrategien haben quadratischen oder kubischen Zuwachs der Strategieparameter in Relation zur Problemdimensionalität. Die Gesamtzahl an Veränderungen, Erweiterungen und Neuentwicklungen auf dem Gebiet Evolutionsstrategien zeigt, daß die klassischen Varianten Verbesserungen zulassen.

Untersucht man diese neuen Varianten der Evolutionsstrategien, stellt man jedoch fest, daß es keine einheitliche Entwicklungsrichtung bei diesen Verbesserungen gibt. Es existieren zwar Varianten, die bei speziellen Optimierproblemen gute Ergebnisse liefern, weil Steuerparameter geeignet auf diese Problemstellungen angepaßt werden können. Es fällt jedoch auf, daß jede neue Variante der Evolutionsstrategien einen eigenen Satz an Steuerparametern mit sich bringt, diese Parameter unter den einzelnen Varianten nicht austauschbar sind und die einzelnen Varianten zudem für spezielle Problemklassen optimiert wurden und damit bei anderen Problemklassen häufig versagen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war die Entwicklung eines Optimierverfahrens, das folgende Eigenschaften besitzt:

- geringe Anforderungen an mathematische Eigenschaften

Das zu entwickelnde Optimierverfahren soll auch dann anwendbar sein, wenn die zu optimierende Funktion z. B. nicht differenzierbar ist oder eventuell überhaupt nicht in geschlossener Form darstellbar ist.

- Robustheit

Bei vielen Leistungsbewertungen wird das zu bewertende Optimierverfahren günstig, d. h. in der Nähe des Optimums initialisiert. Bei realen Anwendungen ist dies oft nicht möglich, da eine initiale Abschätzung über die Lage des Optimums nicht möglich ist. Das zu entwickelnde Optimierverfahren soll auch bei ungünstiger Initialisierung in der Lage sein, das Optimum zuverlässig zu finden.

- Verzicht auf externe Steuerparameter

Viele Optimierverfahren benötigen problemspezifische Sätze und Belegungen von Steuerparametern. Diese Parameter sowie deren Belegungen müssen zum Teil aufwendig bestimmt werden und gelten in der Regel nur für wenige, gleichartige Probleme. Das zu entwickelnde Optimierverfahren soll vollständig auf externe Steuerparameter verzichten.

- lineare Steigerung des systembedingten Rechenaufwandes

Der systembedingte Rechenaufwand, d. h. der Anteil am Gesamtrechenaufwand, der nicht durch die Komplexität der zu optimierenden Funktion bedingt ist, soll maximal linear mit der Problemdimensionalität steigen. So soll vermieden werden, daß das zu entwickelnde Optimierverfahren für geringe Problemdimensionalität gute Ergebnisse liefert, für höhere Problemdimensionalität jedoch bereits an der Komplexität des Optimierverfahrens scheitert.

Das Haupteinsatzgebiet des entwickelten Optimierverfahrens ist die reellwertige Optimierung. Aus diesem Grund wurde als Ausgangspunkt für die Entwicklung die Evolutionsstrategie bzw. eine ihrer Varianten gewählt. Evolutionsstrategien erfüllen von sich aus bereits die Anforderungen bezüglich der mathematischen Eigenschaften sowie in Teilen die Forderung nach linearer Steigerung des systembedingten Rechenaufwandes. In Bezug auf Robustheit und Verzicht auf externe Steuerparameter erfüllen sie die Anforderungen jedoch nur eingeschränkt. Die in dieser Arbeit vorgestellte Variante der Evolutionsstrategien, die asymmetrische Evolutionsstrategie, verwendet ausschließlich eine neuartige Mutationsfunktion, die durch ihre Parameter eine differenzierte Selbstadaptation ermöglicht, ohne den rechentechnischen Aufwand wesentlich zu erhöhen. Die Parameter der Mutationsfunktion werden durch die asymmetrische Evolutionsstrategie automatisch adaptiert, es existieren keine externen Steuerparameter, die vom Benutzer vorgegeben werden müssen.

3 Die Bedeutung der Asymmetrie

Die klassischen Varianten der Evolutionsstrategie verwenden eine normalverteilte Veränderung einer möglichen Lösung, um darauf aufbauend eine verbesserte Lösung zu finden. Der Einsatz der Normalverteilung garantiert eine ungerichtete Veränderung, d. h. die Wahrscheinlichkeit für eine Bewegung auf der positiven Halbachse ist identisch zur Wahrscheinlichkeit einer gleich großen Verschiebung auf der negativen Halbachse. Die Auswahl, welche dieser beiden Varianten zu einer besseren Lösung führt wird durch einen nachfolgenden Selektionsschritt durchgeführt. Diese Vorgehensweise wird häufig mit dem Verhalten der natürlichen Evolution begründet, die ebenfalls einem ungerichteten Evolutionspfad folgen soll. Dieses starre Beharren auf (mittlerweile umstrittene) Prinzipien der natürlichen Evolution provoziert eine zentrale Frage: Soll die natürliche Evolution möglichst originalgetreu nachgebildet werden, oder sollen ingenieurwissenschaftliche Probleme möglichst schnell mit möglichst geringem Ressourcenverbrauch gelöst werden?

Für diese Dissertation ist die Frage zugunsten der zweiten Option entschieden worden. Im folgenden wird anhand eines einfachen ein-dimensionalen Beispiels dargestellt, welche Bedeutung einer gerichteten (und damit asymmetrischen) Veränderung einer möglichen Lösung nachkommt.

Eine klassische Evolutionsstrategie versucht aufbauend auf einer bereits gefundenen aber nicht optimalen Lösung, eine neue, möglichst bessere Lösung zu bestimmen. Dies geschieht im Prinzip durch Addition einer normalverteilten Zufallszahl. Die folgende Grafik gibt diesen Vorgang (vereinfacht) wieder. Ziel in diesem Beispiel ist es, daß Maximum der Geraden zu finden. An der rot markierten Stelle befindet sich eine bereits berechnete, jedoch suboptimale Lösung. Die Position einer neuen Lösung wird nun durch Verschieben der alten Lösung bestimmt. Die Kurve über der Markierung gibt dabei die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für die neue Lösung an. Die Wahrscheinlichkeit für eine kleine Verschiebung ist demnach sehr hoch. Die Wahrscheinlichkeit für eine große Verschiebung sinkt mit zunehmender Distanz von der alten Lösung, bleibt aber stets echt größer als 0.

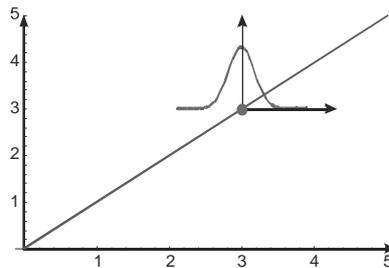


Abbildung 1: Additionsschritt einer klassischen Evolutionsstrategie

An diesem Beispiel läßt sich direkt eine Schwäche der klassischen Evolutionsstrategien ablesen. Die Veränderung der bekannten Lösung hin zu einem Optimum sollte in nahezu allen Fällen in Richtung des steilsten Gradienten erfolgen. Der Additionsschritt der klassischen Evolutionsstrategien vermag dies aber nicht zu leisten. Erst ein nachfolgender Selektionsschritt trifft die Auswahl aus einer Vielzahl des besten Additionsschrittes. In der Praxis arbeitet dieses Verfahren hinreichend oft gut. Es stellt sich nun jedoch die Frage, ob ein leistungsfähigerer Additionsschritt, der die Richtung des steilsten Gradienten erkennen oder erlernen kann, das Optimierverfahren verbessern kann.

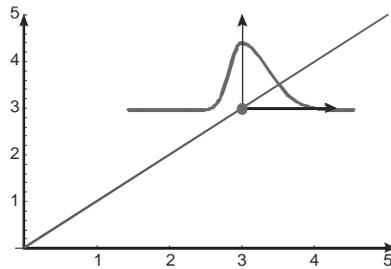


Abbildung 2: Additionsschritt einer asymmetrischen Evolutionsstrategie

Die Abbildung 2 macht hier bereits deutlich, wie ein leistungsfähigerer Additionsschritt funktionieren kann. Die konkrete Realisierung wird im folgenden beschrieben.

4 Realisierung

Bei Evolutionsstrategien handelt es sich um stochastische Optimierverfahren, die Zufallszahlen mit bestimmten Verteilungen verwenden. Bei den klassischen Varianten der Evolutionsstrategien handelt es sich dabei ausschließlich um symmetrische bzw. symmetrisch korrelierte Normalverteilungen. Zur Realisierung einer asymmetrischen Evolutionsstrategie wird jedoch eine asymmetrisch verteilte Zufallszahl benötigt, die zudem weitere Eigenschaften erfüllen muß:

- Definiert über den gesamten reellen Zahlenraum
- Dichtefunktion größer 0 für den gesamten reellen Zahlenraum
- Modus an der Stelle $x = 0$, d. h. Fokus auf kleine Veränderung
- Wahlweise rechts- oder linksschiefe, adaptierbare Asymmetrie
- Skalierbarkeit

Verteilungen mit diesen Eigenschaften sind in der Literatur nicht bekannt. In der Dissertation sind hierzu eine Vielzahl bekannter Verteilungen und mehrere Verteilungssysteme vollständig untersucht worden. Zu den untersuchten Verteilungen gehören die B-, Γ - und χ^2 -Verteilung sowie die Weibull und die Gumbel-Verteilung. Zu den untersuchten Verteilungssystemen gehören das Pearson- und das Expansions-System sowie die Verteilungssysteme von Burr und Toranzo. Viele dieser Verteilungen verletzen bereits das Kriterium des Definitionsbereichs. Lediglich die Gumbel-Verteilung und die Pearson-IV Verteilung scheinen geeignet, sind bei genauer Betrachtung jedoch nicht skalierbar und erlauben keine adaptierbare Asymmetrie.

Als Resultat dieser Untersuchung stand die Entwicklung einer neuen Klasse von Verteilungen fest: die Klasse der Ξ -Verteilungen, die die notwendigen Kriterien zum Einsatz als Verteilungsfunktion einer asymmetrischen Evolutionsstrategie erfüllen.

Grundlage für die Ξ -Verteilungen ist eine Exponentialfunktion mit quadratischem Einfluß des Arguments, einer adaptierbaren Komponente zur Steuerung der Asymmetrie und Skalierbarkeit sowie einem Korrekturterm, der die stochastischen Anforderungen an eine Verteilungsfunktion realisiert. Die folgenden Gleichungen geben ein Beispiel für die Dichte- sowie die Verteilungsfunktion der $\Xi_{c,\sigma}^\gamma$ -Verteilung, die zugleich die Variante der Ξ -Verteilungen darstellt, die über die größte Anzahl von Freiheitsgraden verfügt.

$$\xi_{c,\sigma}^\gamma = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\sigma^\gamma(1+(1+c)^\gamma)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^\gamma}} & \text{für } x < 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\sigma^\gamma(1+(1+c)^\gamma)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{(\sigma(1+c))^\gamma}} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Xi_{c,\sigma}^\gamma = \begin{cases} \frac{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2\sigma^\gamma}}\right)}{1 + \sqrt{(1+c)^\gamma}} & \text{für } x < 0 \\ \frac{1 + \sqrt{(1+c)^\gamma} + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{(\sigma(1+c))^\gamma}}\right)}{1 + \sqrt{(1+c)^\gamma}} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Am Beispiel der Dichtefunktion $\xi_{c,\sigma}^\gamma$ lassen sich die Eigenschaften Skalierbarkeit und adaptierbare Asymmetrie dieser Verteilung sehr anschaulich darstellen.

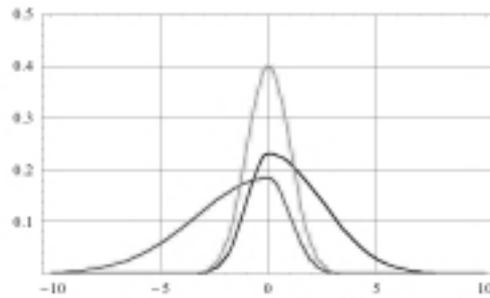


Abbildung 3: Additionsschritt einer asymmetrischen Evolutionsstrategie

Für alle Varianten der Ξ -Verteilungen sind in der Dissertation Erwartungswert, Varianz und Schiefe sowie zentrale Grenzwertsätze hergeleitet bzw. bewiesen worden. Für die Realisierung eines Zufallszahlengenerators, der Ξ -verteilte Zufallszahlen erzeugen kann ist zudem die inverse Verteilungsfunktion notwendig, die in der Dissertation ebenfalls hergeleitet wird.

Aufbauend auf diese Herleitungen wird ein Zufallszahlengenerator entwickelt, der unter Einsatz der Kompositionsmethode und der Transformation der Inversen Ξ -verteilte Zufallszahlen erzeugen kann. Die Anzahl der Elementaroperation ist bei den entwickelten Zufallszahlengeneratoren gering und in Relation zu der Evaluierung der Zielfunktion vernachlässigbar. Somit ist ein effizienter Einsatz Ξ -verteilter Zufallszahlen innerhalb der asymmetrischen Evolutionsstrategien möglich. Die konkrete Realisierung ist in der Dissertation ausführlich beschrieben. Besonderer Wert ist hierbei auf eine möglichst einfache Realisierung gelegt, die eine Integration auch in bereits existierende Optimiersysteme, die auf den klassischen Evolutionsstrategien basieren, in kurzer Zeit ermöglichen soll.

5 Anwendungen

Um die Leistungsfähigkeit eines neuen Optimierverfahrens zu zeigen werden in der Regel Benchmark-Tests eingesetzt. Da diese Tests weltweit einheitlich definiert sind, ist eine objektive Bewertung der einzelnen Optimierverfahren möglich. Leider sind diese Benchmark-Tests so gestaltet, dass sie zwar gute Leistungsaussagen bezüglich akademischer Probleme ermöglichen, aber für die Leistungsbewertung realer Problemstellungen nach unserer Erfahrung nur unzureichend geeignet sind. Aus diesem Grund sind in dieser Dissertation zusätzlich reale Problemstellungen aus der Projektarbeit der letzten fünf Jahre untersucht worden. Hierzu zählen die Qualitätsbewertung von Punktschweißverbindungen, die automatische Generierung von Zugehörigkeitsfunktionen für regelbasierte Entscheidungsunterstützungssysteme und die Optimierung von Schraubenrotorprofilen.

Die letztgenannte Problemklasse wird in dieser Zusammenfassung ausführlich beschrieben. Die Resultate der Benchmark-Tests und der weiteren realen Problemstellungen sind in der Dissertation ausführlich beschrieben und mit einer Vielzahl anderer Optimierverfahren verglichen worden. Hierbei wurde die Leistungssteigerung durch Einsatz asymmetrischer Evolutionsstrategien eindrucksvoll nachgewiesen. Gleichzeitig ist die asymmetrische Evolutionsstrategie das einzige untersuchte Optimierverfahren, das immer ein Optimum berechnen konnte. Dies zeigt die Robustheit dieses Verfahrens.

Das Ziel des Forschungsprojektes Schraubenrotor war die Entwicklung einer Methode, mit der Schraubenprofile optimal an ihr Einsatzgebiet angepaßt werden können. Bei Maschinen, in die Schraubenrotoren eingebaut werden, handelt es sich z. B. um Schraubenverdichter. Diese werden in der Industrie zum Erzeugen von Druckunterschieden für unterschiedliche Medien, den sogenannten Arbeitsfluiden, eingesetzt. Ein großer Bereich ist dabei die Erzeugung von Druckluft zum Antrieb von Maschinen. Ein anderer Bereich ist das Fördern unterschiedlicher Güter. Dabei wird das Fördergut mit Luft vermischt und durch Schläuche oder Rohre transportiert. Die Palette möglicher Fördergüter reicht hierbei von Baustoffen wie Zement und Kalk, bis hin zu Lebensmitteln wie Mehl oder Zucker. Zum Teil werden bereits LKW mit Verdichtern ausgerüstet, die eine Be- bzw. Entladeleistung von einer Tonne pro Minute erreichen. Eine weitere Bedeutung besitzen spezielle Bauformen der Schraubenverdichter, die sog. Roots-Gebläse, bei der Leistungssteigerung von Verbrennungsmotoren durch Kompression der Ansaugluft.

Schraubenverdichter gehören zur Gruppe der mehrwelligen Verdrängermaschinen. Das gemeinsame Prinzip bei allen Typen von Verdrängermaschinen ist ein gekapselter Arbeitsraum, in dem das Arbeitsfluid komprimiert wird. Abbildung 4 zeigt ein Beispiel für einen solchen Schraubenverdichter. Einer der beiden Schraubenrotoren ist hier farblich hervorgehoben.

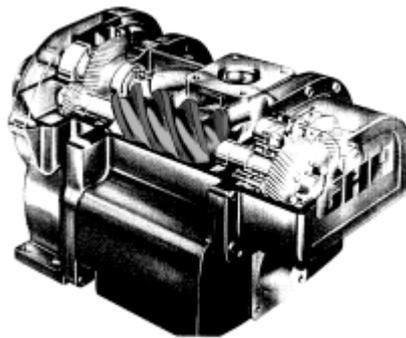


Abbildung 4: Schraubenverdichter der Firma MAN Turbo (vormals GHH Borsig), Oberhausen

Ein Schraubenverdichter wird durch das Profil der beiden Rotoren charakterisiert. Die Abbildung 5 zeigt ein Rotorenpaar und ihre Verzahnung. Bei der Optimierung wird nur der sog. Hauptrotor (im Bild links) verändert. Ein passender Nebenrotor läßt sich anhand der Geometrie des Hauptrotors berechnen. Diese Berechnung ist jedoch rechenintensiv.



Abbildung 5: Haupt- und Nebenrotor eines Schraubenverdichters

Der Hauptrotor wird durch eine Anzahl von Stützstellen beschrieben, zwischen denen das Profil durch Splines interpoliert wird. Bei der Optimierung werden diese Stützstellen verschoben, ähnlich zu den Abbildungen 1 und 2. Die folgende Abbildung 6 gibt eine vereinfachte Darstellung mit wenigen Stützstellen. Bereiche, in die eine Stützstelle nicht verschoben werden darf, da sie sonst gegen Restriktionen durch Bauform o. ä. verstoßen, sind in der Abbildung markiert. Hier wird auch anschaulich deutlich, daß die Optimierung eines Rotorprofils stark richtungsgeprägt ist.

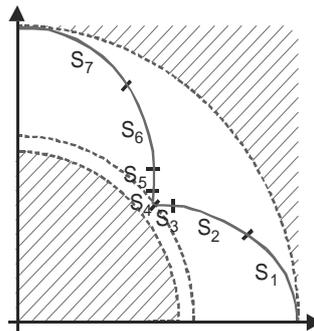


Abbildung 6: Stützstellen und Restriktionen bei der Optimierung von Rotorprofilen

Der Einsatz einer asymmetrischen Evolutionsstrategie, die eine symmetrische Evolutionsstrategie mit Adaptation von Schrittweiten ablöst, hat auf die Anzahl der benötigten Generationen und damit auf die Laufzeit der Optimierung beeindruckende Auswirkungen. Für das Optimierkriterium Maximierung der Schöpffläche konnten bereits nach 800 Generationen Werte erreicht werden, die bei Einsatz der symmetrischen Evolutionsstrategie erst nach 20.000 Generationen vorlagen. Da die Berechnung der Gegenrotoren sowie die Berechnung der Fitnessfunktion rechenintensiv sind, bedeutet dies eine Reduktion der Laufzeiten von mehreren Tagen auf wenige Stunden. Für weitere Kriterien, wie Minimierung der polaren Flächenträgheitsmomente oder Minimierung der Schöpffläche konnten ähnlich reduzierte Laufzeiten ermittelt werden.

6 Zusammenfassung

Die Entwicklung und Realisierung der asymmetrischen Evolutionsstrategie stellt eine weitreichende Weiterentwicklung der Evolutionsstrategien und der evolutionären Algorithmen dar. In der vorliegenden Arbeit ist zum ersten Mal die Möglichkeit einer Richtungsadaptation sowie die Auswirkung dieser neuen Adaptationsart systematisch untersucht worden. Da in der Literatur keine geeignete Verteilung bekannt ist, mußten alle stochastischen Grundlagen hergeleitet werden. Alle experimentellen Resultate, sowohl für Testfunktionen als auch für reale Anwendungen haben gezeigt, daß die klassische Kombination von ungerichteter Mutation und anschließender Selektion (wie sie bei den symmetrischen Varianten durchgeführt wird) der in dieser Arbeit entwickelten gerichteten Mutation mit anschließender Selektion unterlegen ist. Die allgemeine Forderung, daß eine Adaptation ausschließlich durch die Selektion erfolgen muß, verliert damit ihre Gültigkeit.

Da die asymmetrische Evolutionsstrategie als großes Vorbild die Evolutionsstrategie mit Adaptation von n Schrittweiten hat, kann sie auch deren geringe Anforderungen an die mathematischen Eigenschaften übernehmen. Das dies auch für reale Anwendungen gilt, wird an den Beispielpunkten aus dem Bereich der unscharfen Logik gezeigt. Sowohl bei der Optimierung unscharfer Mengen zur Farbbeschreibung als auch bei der Generierung unscharfer Inferenzsysteme sind keine Annahmen über Differenzierbarkeit, Stetigkeit oder andere Eigenschaften gemacht worden. Die Forderung nach Verzicht auf externe Steuerparameter ist strikt eingehalten. Der Grund hierfür ist die Tatsache, daß ein Optimierverfahren, bei dem erst brauchbare Steuerparameter mittels Raten, Heuristiken oder gar Meta-Algorithmen aufwendig bestimmt werden müssen, weniger akzeptiert wird, als ein Verfahren, das ohne diese Parameter auskommt und trotzdem zuverlässig arbeitet.

Fazit: Die asymmetrischen Evolutionsstrategien zeichnen sich durch hohe Konvergenzgeschwindigkeit bei gleichzeitig hoher Konvergenzsicherheit und Robustheit aus. Die mathematischen Anforderungen an das Optimierproblem sind minimal und es existieren keine, im Vorfeld einzustellenden, Steuerparameter. Das Verfahren ist einfach zu implementieren und läßt sich problemlos in bestehende Optimiersysteme integrieren. In den untersuchten Beispielen konnte eine Reduktion der Laufzeit um bis zu 90% der vormals benötigten Rechenzeit erreicht werden. Diese Reduktion ist vergleichbar mit dem Einsatz eines Systems bestehend aus zehn parallelen Rechnern. Da die asymmetrischen Evolutionsstrategien zur Verfügung stehen ist eine solche Leistungssteigerung nun zum Bruchteil der Kosten eines Parallelrechnersystems realisierbar.

Literaturverzeichnis

- [Hi02] Hildebrand, L.: Asymmetrische Evolutionsstrategien. Dissertation am Fachbereich Informatik, Universität Dortmund, Dortmund, 2002.
Elektronisch verfügbar unter <http://eldorado.uni-dortmund.de:8080>