

Synthese im Kontext Parametrischer Markow-Modelle¹

Sebastian Junges²

Abstract: Markow-Modelle sind ein prominenter Formalismus, um Systeme mit unsicherem Verhalten zu modellieren und zu analysieren. Ein Markov-Modell umfasst (System)-Zustände mit wahrscheinlichkeitsbehafteten Transitionen. Eine typische Fragestellung für ein gegebenes Modell lautet: *Beträgt die maximale Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Zustand erreicht wird, weniger als 0,01%?* Um diese Frage zu beantworten, ist es wichtig, dass die Wahrscheinlichkeiten im Markow-Modell exakt bekannt sind. Dies ist leider oft unrealistisch. Um den potentiellen Ungenauigkeiten in diesen Wahrscheinlichkeiten gerecht zu werden, betrachten wir parametrische Modelle, in denen Wahrscheinlichkeiten durch symbolische (genauer: parametrische) Ausdrücke statt durch konkrete Werte dargestellt werden. Es ergeben sich einige natürliche Fragestellungen, zum Beispiel: *Ist die maximale Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Zustand erreicht wird, weniger als 0,01% für jede Belegung der Parameter?* In diesem Exposé betrachten wir diese und verwandte Fragestellungen. Die geschilderten Ergebnisse liefern neue Erkenntnisse zur theoretischen Komplexität sowie neue und effektive Methoden. Diese Methoden wurden implementiert und sie verbessern den aktuellen Stand der Technik beträchtlich. Die Implementierungen sind nun in der Lage, Markow-Modelle mit tausenden Parametern und Millionen Zustände zu analysieren.

1 Einführung

Markow-Modelle sind mathematische Modelle zur Darstellung wahrscheinlichkeitsbehafteter Prozesse und Phänomene. Die Analyse dieser Markow-Modelle zur Bewertung von komplexen Systemen mit stochastischer Dynamik ist allgegenwärtig. Sie ist Forschungsgegenstand, u.a. in der Künstlichen Intelligenz, der Zuverlässigkeitstechnik, der Systembiologie und in den Formalen Methoden. Der Kontext dieser Arbeit liegt im Bereich der Formalen Methoden, insbesondere in der automatisierten Analyse von sicherheitskritischen Systemen. Ein Markov-Modell kann solche Systeme passend erfassen, indem Systemzustände durch wahrscheinlichkeitsbehaftete Transitionen miteinander verbunden werden. Ein Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls von der Fahrzeugelektronik zu modellieren, wobei die Zustände dann den Zustand verschiedener Fahrzeugkomponenten darstellen. Eine typische Fragestellung wäre nun etwa, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Elektronik vor dem nächsten Werkstattbesuch ausfällt. In das Markow-Modell übertragen lautet die Fragestellung dann: *Wie hoch ist die maximale Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter (Fehler-)Zustand erreicht wird?* Die Analyse ist naturgemäß stark abhängig von den Transitionswahrscheinlichkeiten in dem Modell. Diese sind allerdings mit grosser Unsicherheit verbunden, da sie oft auf (daten- und expertengestützten) Schätzungen basieren. Es stellt sich die Frage, wie die berechneten Wahrscheinlichkeiten im Rahmen dieser Unsicherheiten zu interpretieren sind. Im weiteren Sinne ist die grundlegende Annahme in dieser

¹ Englischer Titel der Dissertation: 'Parameter Synthesis in Markov Models'

² s.junges@berkeley.edu, University of California at Berkeley, USA

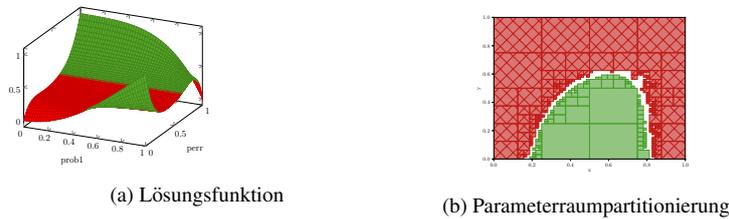


Abb. 1: Parameterbelegungen und Erreichbarkeitswahrscheinlichkeit

Arbeit, dass die algorithmische Analyse solcher Modelle diese Unsicherheiten in Betracht ziehen muss. Wir betrachten deshalb Markov-Modelle, deren Wahrscheinlichkeiten auch symbolisch statt konkret dargestellt werden können. Eine vergleichbare Situation zu den unsicheren Wahrscheinlichkeiten ergibt sich, wenn die Wahrscheinlichkeiten wählbar sind, was zum Beispiel in randomisierten Algorithmen der Fall ist. Die Frage ist dann, wie diese Wahrscheinlichkeiten geeignet gewählt werden sollten. Im weiteren Verlauf dieses Exposés werden wir sehen, dass eine solche Sichtweise eine natürliche Verbindung zu Planungsproblemen und dem Bestärkenden Lernen liefert.

Die Dissertation [Ju20] betrachtet parametrische Markov-Entscheidungsprozesse sowie den Sonderfall der *parametrischen Markov-Ketten* (*parametric Markov Chains*, pMCs). Das Ersetzen der Parameter durch eine konkrete Belegung induziert die klassischen parameterfreien Markov-Entscheidungsprozesse (MDPs) und Markov-Ketten (MCs). Für jeden dieser induzierten MCs (oder MDPs) können wir die (maximale) Wahrscheinlichkeit bestimmen. Dies ergibt dann einen Graphen wie in Abb. 1a, in dem wir für zwei Parameter die Erreichbarkeitswahrscheinlichkeit darstellen. Die Kurve ist rot gefärbt, wenn diese Wahrscheinlichkeit unterhalb einer bestimmten Grenze liegt. Im weiteren Verlauf dieses Exposés betrachten wir nur MCs mit Erreichbarkeitswahrscheinlichkeiten und verzichten auf MDPs. Die dargestellten Ergebnisse basieren in Teilen auf [De15, Wi19, Ce19a, Cu18, Qu16, Ce19b, Ju18].

2 Problemformulierung

Eine *Markov-Kette* ist ein Tupel aus einer (endlichen) Menge von Zuständen, einem Initialzustand sowie einer Transitionswahrscheinlichkeitsfunktion P , die jeden Zustand s auf eine Verteilung $P(s)$ über Nachfolgezustände abbildet. In dieser Arbeit konzentrieren wir uns auf *Erreichbarkeitswahrscheinlichkeiten*. Bei vorgegebenem Zielzustand t wird diese Wahrscheinlichkeit, t zu erreichen, bestimmt durch die Summe der Pfadwahrscheinlichkeiten aller Pfade, die im Initialzustand starten und in t enden. Die Pfadwahrscheinlichkeit ist dabei durch die Multiplikation der Transitionswahrscheinlichkeiten entlang des jeweiligen Pfades gegeben.

Beispiel 1. *Abb. 2a zeigt eine Markov-Kette mit 13 Zuständen. Transitionen werden durch Kanten dargestellt, welche mit der Transitionswahrscheinlichkeit $P(s)(s')$ beschriftet sind. Die Kette modelliert ein Protokoll, mit dem ein Würfelergebnis durch den wiederholten Wurf einer fairen Münze simuliert wird (der sogenannte Knuth-Yao Würfel). Tatsächlich*

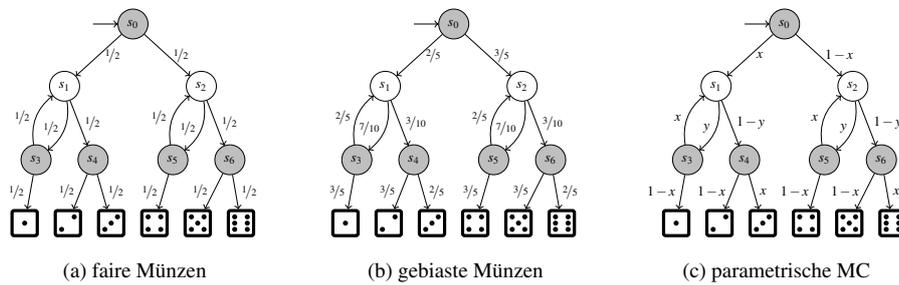


Abb. 2: Parametrischer Knuth-Yao Würfel

ist die Wahrscheinlichkeit um beispielsweise einen Zielzustand \square zu erreichen genau $\sum_{i>0} 1/2 \cdot (1/2 \cdot 1/2)^i = 1/6$.

In einer parametrischen Markow-Kette (pMC) wird zusätzlich eine endliche *Parametermenge* fixiert. Die Transitionswahrscheinlichkeitsfunktion wird dann so abgewandelt, dass sie jedes Paar von Ursprungszustand s und Nachfolgezustand s' auf ein Polynom abbildet, das die Wahrscheinlichkeit beschreibt, von Zustand s zu Zustand s' zu wechseln.

Beispiel 2. Was würde passieren, wenn die Münze nicht fair wäre und wir stattdessen zwei unfaire Münzen alternierend werfen würden? Insbesondere werfen wir die eine Münze in allen grauen Zuständen, die andere in allen weißen Zuständen. Abb. 2b zeigt die MC für einen spezifischen Fall. Zustand \square wird nun nicht mal mehr mit einer Wahrscheinlichkeit größer $3/20$ erreicht. Wir interessieren uns jedoch für verschiedene unfaire Münzen und wir parameterisieren die Münzen demnach in ihrem Bias. Abb. 2c zeigt eine parameterisierte Variante des Knuth-Yao Würfels mit Parametern $X = \{x, y\}$: Hier stellen x und y die Wahrscheinlichkeiten für ‘Kopf’ in den grauen beziehungsweise weißen Zuständen dar.

Eine *Belegung* weist Parametern konkrete Werte zu. In einer pMC ergibt das geeignete Ersetzen von Parameterwerten durch eine Belegung eine Markow-Kette, welche wir als *Instanziierung*. Jede Belegung ist so zu einer Markow-Kette *assoziiert*. Die Menge aller geeigneten Belegungen von Parametern nennen wir den *Parameterraum*. Teilmengen des Parameterraums bezeichnen wir durchgehend als *Region*.

Beispiel 3. Eine mögliche Belegung der pMC in Abb. 2c ist gegeben durch $\text{val} := \{x \mapsto 2/5, y \mapsto 7/10\}$. Die assoziierte Instanziierung ist in Abb. 2b dargestellt. Die pMC in Abb. 2a ist das Ergebnis des Ersetzens mit $\text{val}' := \{x, y \mapsto 1/2\}$. Der Parameterraum ist $\{\text{val} \mid 0 \leq \text{val}(x), \text{val}(y) \leq 1\}$. Wir interessieren uns zum Beispiel besonders für die Region der fast-fairen Münzen: $\{\text{val} \mid 9/20 < \text{val}(x), \text{val}(y) < 11/20\}$.

Eine *Eigenschaft* ist eine Kombination aus einem oder mehreren Zielzuständen und einer Schranke die eine Erreichbarkeitswahrscheinlichkeit beschränken soll. Eine MC *erfüllt* die Eigenschaft, wenn die Erreichbarkeitswahrscheinlichkeit zum Zielzustand nicht unter dieser Schranke liegt. Für eine gegebene Region interessieren wir uns nun zum Beispiel für die Teilmenge der Belegungen, sodass die assoziierte MCs die Eigenschaft erfüllen.

Belegungen, deren assoziierte MC eine Eigenschaft erfüllen, nennen wir *akzeptierend*, alle anderen *ablehnend*. Es ergeben sich zwei zentrale Fragestellungen:

Für gegebene pMC, Eigenschaft, und Region:

- *Zulässigkeitsynthese*: Existiert eine akzeptierende Belegung in einer Region?
- *Regionsverifikation*: Ist eine Region akzeptierend, beziehungsweise, sind alle Belegungen in einer Region akzeptierend?

Beispiel 4. Wir betrachten weiterhin die pMC aus Abb. 2c, zusammen mit einer Eigenschaft φ , die bedingt, dass \square mit einer Wahrscheinlichkeit nicht kleiner als $3/20$ erreicht wird. Es existiert eine akzeptierende Belegung, zum Beispiel die Belegung für faire Münzen. Sei $R = \{\text{val}: X \rightarrow \mathbb{R} \mid 1/10 \leq \text{val}(x) \leq 9/10 \text{ und } 3/4 \leq \text{val}(y) \leq 5/6\}$ eine Region und sei Eigenschaft $\varphi' := \neg\varphi$ die Eigenschaft, die bedingt, dass \square mit einer Wahrscheinlichkeit mehr als $3/20$ erreicht wird. Das Verifikationsproblem besteht nun darin, zu bestimmen, ob alle Belegungen in R φ' akzeptieren. Die Frage ist äquivalent zu der Frage, ob alle Belegungen in R die Eigenschaft φ ablehnen. Da alle Belegungen in R eine induzierte Erreichbarkeitswahrscheinlichkeit zu Zustand \square kleiner $3/20$ haben, muss das Verifikationsproblem mit wahr beantwortet werden. Demnach akzeptiert R die Eigenschaft φ' and lehnt R φ ab.

Weitere Fragestellungen, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht wurden sind: (1) Das Berechnen einer geschlossenen Darstellung: Wie sieht die Lösungsfunktion aus, die Belegungen auf die Erreichbarkeitswahrscheinlichkeit in den assoziierten MCs abbildet? (2) Die Parameterraumpartitionierung: Wie finden wir eine Darstellung (oder Approximation) aller akzeptierenden Belegungen?

Beispiel 5. Wir betrachten weiterhin Bsp. 4. Die Lösungsfunktion $x \cdot (1-y) \cdot (1-x) / (1-x \cdot y)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit \square zu erreichen (unter der Annahme, dass $\text{val}(x)$ und $\text{val}(y)$ strikt zwischen 0 und 1 liegen). In Abb. 1b approximieren wir akzeptierende und ablehnende Belegungen. Die grüne (gepunktete) Fläche, als Vereinigung von kleineren rechteckigen akzeptierenden Regionen beschreibt eben jene Belegungen, bei denen die Eigenschaft φ erfüllt ist (durch die assoziierte MC), und die rote (gestrichene) Fläche stellt die ablehnenden Belegungen dar. Die weiße Fläche stellt den Teil des Parameterraums dar, für den ein (geeigneter) Algorithmus noch nicht entschieden hat, ob die Belegungen akzeptierend oder ablehnend sind.

Diese Problemstellungen wurden in Vorarbeiten, zum Beispiel in [HHZ11, HBK17, Ba11, Ch13], betrachtet. Intuitiv sind diese Fragen komplex durch die Abhängigkeiten zwischen den verschiedenen Parametern und dem Auftreten von den Parametern an verschiedenen Transitionen in der pMC.

3 Parametersynthese ist ETR-vollständig

Die Komplexitätsklasse ETR (von *Existential Theory of the Reals*) enthält alle Probleme die in Polynomialzeit auf das Entscheidungsproblem ETR reduziert werden können.

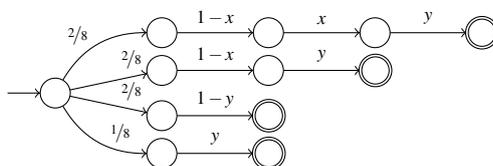


Abb. 3: Konstruktion zur ETR-Härte der Zulässigkeitsynthese (Beispiel)

Die Klasse umfasst die Klasse NP und ist in der Klasse PSPACE enthalten. Das Problem ETR besteht darin, zu entscheiden, ob ein gegebener existentiell-quantifizierter Satz $\exists x_1 \dots \exists x_n F(x_1, \dots, x_n)$ wahr ist, wobei F eine beliebige Boolesche Verknüpfung von polynomiellen Ungleichungen beschreibt, und x_1, \dots, x_n reellwertige Variablen sind.

Beispiel 6. Betrachten wir die pMC in Abb. 4a, mit Region $R = \{\text{val} \mid 0 < \text{val}(x) < 1, 0 < \text{val}(y) < 1\}$, sowie Zielzustand s_3 . Es existiert eine Belegung sodass wir s_3 mit einer Wahrscheinlichkeit mindestens $3/4$ erreichen, genau dann, wenn der folgende Satz wahr ist:

$$\exists p_0, \dots, p_4, x, y : p_0 \geq 3/4 \wedge 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1 \wedge p_3 = 1 \wedge p_4 = 0 \quad (1)$$

$$s_1 = y \cdot s_2 + (1 - y) \cdot s_3 \wedge s_2 = y \cdot s_1 + (1 - y) \cdot s_4 \quad (2)$$

Für jeden Zustand s_i führen wir eine Variable p_i ein, mit der intuitiven Bedeutung, dass sie die Erreichbarkeitswahrscheinlichkeit von Zustand s_i zum Zielzustand darstellt. Die Variablen x, y entsprechen den Parametern mit gleichem Namen. In (1) kodieren wir zunächst, dass die Wahrscheinlichkeit mindestens $3/4$ sein soll, und dass die Parameterwerte wie in R beschrieben sein sollen. Weiterhin wissen wir, dass vom Zielzustand s_3 sicherlich s_3 erreicht wird. Mit einem einfachen Graphalgorithmus bestimmen wir dazu, dass es keinen Pfad von s_4 zu s_3 gibt und die Wahrscheinlichkeit demnach 0 sein muss³. Die restlichen Gleichungen, in (2), entsprechen einer rekursiven Beschreibung der Erreichbarkeitswahrscheinlichkeiten (oft Bellman-Gleichungen genannt). Die Länge des Satzes ist linear in der Größe des pMCs. Es ergibt sich somit eine polynomielle Reduktion.

Bemerkenswerterweise funktioniert die Reduktion unter sehr milden Annahmen auch in die andere Richtung: Wir zeigen beispielhaft, wie wir aus einer beliebigen polynomiellen Ungleichung eine pMC erstellen, sodass deren Zielzustände mit einer gesammelten Wahrscheinlichkeit von mindestens λ erreicht werden, genau dann, wenn die Belegung die polynomielle Ungleichung erfüllt. Wichtige Vorarbeiten basieren auf [Ch17].

Beispiel 7. Betrachten wir den Satz $G = \exists x, y : -2x^2y + y \geq 5$. Wir stellen die Ungleichung um, um den negativen Koeffizienten zu eliminieren und nach Ausmultiplizieren erhalten wir

$$2 \cdot (1 - x)xy + 2 \cdot (1 - x)y + 2 \cdot (1 - y) + y - 2 \geq 5.$$

In einem letzten Schritt addieren wir 2 und teilen durch 8, sodass die Koeffizienten gemeinsam einer Verteilung entsprechen:

$$2/8 \cdot (1 - x)xy + 2/8 \cdot (1 - x)y + 2/8 \cdot (1 - y) + 1/8 \cdot y \geq 7/8$$

³ Wenn y auch 1 werden darf, muss die Kodierung explizit um diese Graphensuche erweitert werden.

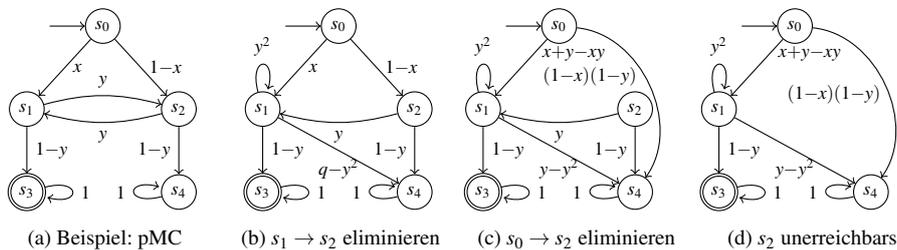


Abb. 4: Transitionseliminierung (Beispiel)

Aus dieser Ungleichung konstruieren wir nun Abb. 3, wobei die fehlende Wahrscheinlichkeitsmasse in eine Senke geleitet wird. Die Zielzustände werden genau dann mit einer Wahrscheinlichkeit mindestens $7/8$ erreicht, wenn der Satz G wahr ist.

Theorem 1. Die Zulässigkeitsynthese ist ETR-vollständig.

Das Theorem zeigt, dass dieses Problem im Allgemeinen schwer zu lösen ist und motiviert die weitere Suche nach einer guten Heuristik. Des Weiteren ist zu beachten, dass die Reduktion bereits für strukturell einfache pMCs funktioniert. Die Härte des Problems gilt demnach bereits für viele praktisch relevante Subklassen.

4 Algorithmen zur Parametersynthese

Wir skizzieren Algorithmen, die den aktuellen Stand der Technik darstellen. Alle skizzierten Verfahren sind offen und frei verfügbar und wurden in der Dissertation empirisch evaluiert.

Berechnen der Lösungsfunktion

Der erste Ansatz, pMCs zu analysieren, basiert auf der Berechnung einer Lösungsfunktion. Eine Lösungsfunktion bildet Belegungen auf Erreichbarkeitswahrscheinlichkeiten ab, siehe Bsp. 5. Algorithmisch kann diese Abbildung aus den Gleichungen wie in Bsp. 6 durch Eliminierung der Zustandsvariablen berechnet werden. Tatsächlich eignet sich dazu ein Gauss-Algorithmus auf der Transitionsmatrix – allerdings zeigen andere Ansätze eine höhere Praxistauglichkeit. Die Herausforderung dabei besteht darin, dass wir über einem Polynomialring eliminieren und die Matrixeinträge demnach stark wachsen, was sich leider auch nicht ganz verhindern lässt. Praktisch hat sich die Zustandseliminierung (aus der Automatentheorie) durchgesetzt.

Beispiel 8. Betrachten wir wieder die pMC in Abb. 4a. Wir eliminieren nun Zustand s_2 . Dazu eliminieren wir erst die Transition $s_1 \rightarrow s_2$, siehe Abb. 4b, und dann die Transition $s_0 \rightarrow s_2$, siehe Abb. 4c. Damit ist Zustand s_2 nun unerreichbar und wir können den Zustand sowie die ausgehenden Kanten entfernen, siehe Abb. 4d. Nach dem Eliminieren von s_1 gibt es eine einzelne Kante zwischen Initial- und Zielzustand, die mit der Erreichbarkeitswahrscheinlichkeit beschriftet ist.

Gleichungssystembasierte Ansätze zum Finden von Belegungen

Da die Zulässigkeitssynthese ein ETR-hartes Problem darstellt, gibt es nur wenig Hoffnung auf einen vollständigen und skalierbaren Algorithmus. Die Kodierung, wie in Beispiel 6 dargestellt, kann zwar von sogenannten SMT-Solvern gelöst werden. Allerdings skalieren diese Methoden bisher kaum zu interessanten Probleminstanzen. Da es zum Lösen der Zulässigkeitssynthese aber reicht, eine akzeptierende Belegung (nichtdeterministisch) zu raten und dann zu verifizieren, und diese Verifikation der Analyse einer (parameter-freien) MC entspricht, fokussieren sich einige Ansätze auf eine Suche im Parameterraum. Es hat sich herausgestellt, dass es wichtig ist, dabei einen Teil der Problemformulierung einfließen zu lassen, da ein blindes Suchen in einem hochdimensionalen Raum natürlich weiterhin ein schweres Problem ist.

Wir vereinigen die beiden Sichtweisen wie folgt: Wir raten eine (beliebige) Belegung und linearisieren dann⁴ um diese Belegung herum, um eine Belegung mit einer höheren Erreichbarkeitswahrscheinlichkeit zu finden. Dieses Verfahren iterieren wir, bis wir eine akzeptierende Belegung finden. Technisch erstellen wir ein Quadratisch-Beschränktes Quadratisches Optimierungsproblem, das wir durch eine Konvex-Konkavprozedur lösen. Das numerische Lösungsverfahren, das dabei zum Einsatz kommt, ist jedoch oft numerisch instabil. Wir binden deshalb die dedizierte Analyse von MCs so ein, dass sich ein effektives und effizientes Verfahren ergibt.

Gegenbeispielgelenkte Synthese

Die gegenbeispielgelenkte Synthese stellt die elementare Frage, ob wir von der Analyse einer ablehnenden Belegung schließen können, dass andere Belegungen auch ablehnend sein müssen, ohne eben jene andere Belegungen explizit zu betrachten. Wir betrachten hier einen Algorithmus, der für eine endliche Menge von Belegungen und zur Beantwortung der Zulässigkeitssynthese konzipiert ist. Weiterhin nehmen wir hier an, dass die betrachtete Eigenschaft erfordert, dass die Erreichbarkeitswahrscheinlichkeit in einer induzierten MC kleiner als λ sein muss.

Wir bemerken erneut, dass das Finden einer akzeptierenden Belegung unser Problem lösen würde. Wir betrachten also den Fall, bei dem die geratene Belegung ablehnend ist. In diesem Fall ist die Erreichbarkeitswahrscheinlichkeit in der induzierten MC zu groß. Ein *Gegenbeispiel* besteht nun aus einer Teilmenge der Zustände der pMC, sodass für die gegebene Belegung val auf der assoziierten Teil-MC die Erreichbarkeitswahrscheinlichkeit auch λ überschreitet. Wenn in diesem Teilgraphen ein Parameter x nicht auftaucht, so können wir uns sicher sein, dass ein alleiniges Variieren von $\text{val}(x)$ nicht ausreichen wird, um eine akzeptierende Belegung zu finden. Daraus folgt, dass wir nun eine Menge von Belegungen ausschließen können.

⁴ Tatsächlich konvexifizieren wir in der Methode in der Dissertation.

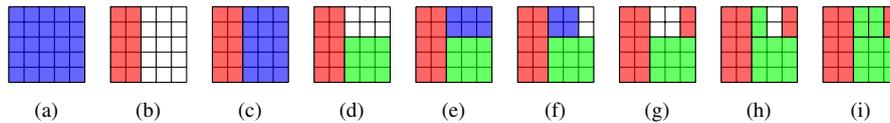


Abb. 5: Verfeinerung in einer abstraktionsgelenkten Synthese zur Parameterraumpartitionierung

Abstraktionsgelenkte Synthese

Die wichtige Voraussetzung für die abstraktionsgelenkte Synthese ist die Wahl einer Abstraktion des Problems, die einfacher zu lösen ist: Die Komplexität der Zulässigkeitsynthese nimmt drastisch ab, wenn jeder Parameter nur an ausgehenden Transitionen von einem einzigen Zustand auftritt. Insbesondere kann der optimale Wert dann lokal entschieden werden, zum Beispiel durch eine Reduktion auf einen MDP und durch die effiziente Analyse dieses MDPs. Insbesondere gilt: Wenn es für die abstrakte Quotienten-pMC keine akzeptierende Belegung gibt, kann es auch keine akzeptierende Belegung in der Original-pMC geben. Dies rechtfertigt die Darstellung als Abstraktion. Die zweite Voraussetzung für die Abstraktionsgelenkte Synthese ist die Möglichkeit, zu verfeinern. In diesem Fall verfeinern wir den Parameterraum. Solche Verfeinerungen für den Knuth-Yao Würfel ergeben Abb. 1b.

Beispiel 9. Wir skizzieren den Ansatz in Abb. 5. Das Gitter zeigt skizzenhaft 2 Parameter mit jeweils 5 Zuweisungen, d.h., jede Zelle korrespondiert zu einer Belegung. Blaue Regionen entstehen, wenn die Region sowohl akzeptierende und ablehnende Belegungen umfasst (in der Abstraktion), grün/rot zeigen akzeptierende und ablehnende Regionen. Wir betrachten die vollständige Region (blau), und bilden die Quotienten-pMC \mathcal{D}' . Die Analyse auf dieser pMC ergibt, dass es sowohl akzeptierende als auch ablehnende Belegungen für \mathcal{D}' gibt. Wir teilen den Parameterraum auf. Eine Betrachtung der linken Region ergibt, dass alle Belegungen in \mathcal{D}' ablehnend sind. Demnach sind sie auch ablehnend für \mathcal{D} . Wir iterieren auf diese Art weiter. Zu beachten ist, dass in Schritt (f) zwar alle Belegungen akzeptierend sind, wir das jedoch aus der Analyse der Quotienten-pMC nicht folgern können.

5 Verbindung zu partiell beobachtbaren MDPs

MDPs sind weitverbreitet zur Analyse von Handlungsplanungsproblemen, bei denen sich eine Planungsentscheidung auf die Dynamik des Systems auswirkt. In MDPs kann der Planer sich jedem Zustand lokal zum Ausführen einer bestimmten Aktion entscheiden, d.h., ein Plan bildet Zustände auf Aktionen ab. Um einen solchen Plan umzusetzen, muss man allerdings den Zustand beobachten können. Diese Voraussetzung ist in vielen Systemen nicht gegeben. Stattdessen erlauben diese Systeme nur eine partielle Beobachtbarkeit des Zustands. Um diesem Fall gerecht zu werden, wurden MDPs zu *partially observable MDPs* (POMDPs) [RN10] erweitert, indem jeder Zustand mit einer Beobachtung markiert wird.

Ein (optimaler) Plan in einem POMDP ist eine Abbildung von einer Folge von Beobachtungen auf eine Aktion. Da solche Pläne unendlich groß werden können, sind Pläne mit beschränktem Speicher interessant [Me99]. Wir betrachten hier nur deren einfachste

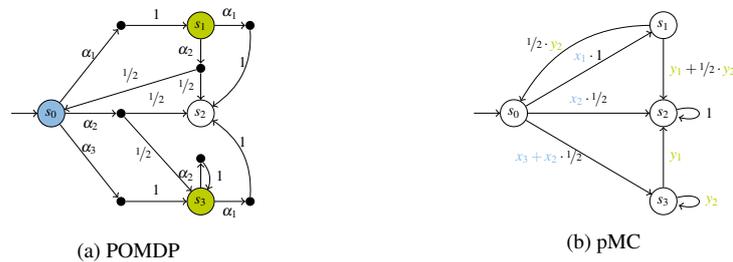


Abb. 6: Von POMDPs zu pMCs.

Variante, sogenannte speicherlose Pläne. Ein speicherloser Plan für einen POMDP bildet Beobachtungen auf Verteilungen über Aktionen ab, d.h., man wählt bei jeder aktuellen Beobachtung durch einen passenden, gebiasteten Münzwurf die nächste Aktion. Solche Pläne werden oft auch durch Bestärkendes Lernen konstruiert. Dieses Problem ist eng mit der Zulässigkeitsynthese in pMCs verwandt.

Beispiel 10. *Abb. 6a zeigt einen POMDP, wobei die Farben an den Zuständen die Beobachtung darstellen und die Buchstaben den Aktionen entsprechen. Beim Beobachten von einer grünen Beobachtung in Zustand s_1 oder s_3 , wählt ein Plan mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit q_1 Aktion α_1 und mit einer Wahrscheinlichkeit q_2 Aktion α_2 . Die Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3 bestimmen die Verteilung bei der Beobachtung in s_0 . Tatsächlich liefert diese Sichtweise direkt eine pMC, wie gezeigt in Abb. 6b.*

6 Schluss

Im Rahmen der Dissertation wurde gezeigt, dass die Parametersynthese für Markov-Modelle ein vielversprechender Ansatz ist, um eine Reihe praktischer Probleme anzugehen. Obwohl das Problem theoretisch schwer ist, gibt es bereits verschiedene Ansätze, um dennoch gute Ergebnisse zu erzielen. Wir sehen natürlich weiterhin Möglichkeiten, den Stand der Technik in Zukunft zu verbessern, insbesondere durch interdisziplinäre Ansätze, die die neuesten Erkenntnisse aus der Probabilistischen Inferenz und der Robotik nutzen.

Danksagung. Ich möchte mich bei meinem Doktorvater Joost-Pieter Katoen, sowie bei meinen zahlreichen Ko-Autoren bedanken, mit denen ich jahrelang an der Parametersynthese geforscht habe. Zusätzlich bedanke ich mich bei Nils Jansen sowie Angelika und Christian Junges für die Unterstützung beim Erstellen dieser Zusammenfassung.

Literaturverzeichnis

- [Ba11] Bartocci, Ezio; Grosu, Radu; Katsaros, Panagiotis; Ramakrishnan, C. R.; Smolka, Scott A.: Model Repair for Probabilistic Systems. In: TACAS. Jgg. 6605 in LNCS. Springer, S. 326–340, 2011.
- [Ce19a] Ceska, Milan; Hensel, Christian; Junges, Sebastian; Katoen, Joost-Pieter: Counterexample-Driven Synthesis for Probabilistic Program Sketches. In: FM. Jgg. 11800 in LNCS. Springer, S. 101–120, 2019.

- [Ce19b] Ceska, Milan; Jansen, Nils; Junges, Sebastian; Katoen, Joost-Pieter: *Shepherding Hordes of Markov Chains*. In: TACAS. Jgg. 11428 in LNCS. Springer, S. 172–190, 2019.
- [Ch13] Chen, Taolue; Hahn, Ernst Moritz; Han, Tingting; Kwiatkowska, Marta Z.; Qu, Hongyang; Zhang, Lijun: *Model Repair for Markov Decision Processes*. In: TASE. IEEE CS, S. 85–92, 2013.
- [Ch17] Chonev, Ventsislav: *Reachability in Augmented Interval Markov Chains*. CoRR, abs/1701.02996, 2017.
- [Cu18] Cubuktepe, Murat; Jansen, Nils; Junges, Sebastian; Katoen, Joost-Pieter; Topcu, Ufuk: *Synthesis in pMDPs: A Tale of 1001 Parameters*. In: ATVA. Jgg. 11138 in LNCS. Springer, S. 160–176, 2018.
- [De15] Dehnert, Christian; Junges, Sebastian; Jansen, Nils; Corzilius, Florian; Volk, Matthias; Bruintjes, Harold; Katoen, Joost-Pieter; Ábrahám, Erika: *PROPhESY: A PRObabilistic ParamETER SYnthesis Tool*. In: CAV. Jgg. 9206 in LNCS. Springer, S. 214–231, 2015.
- [HBK17] Hutschenreiter, Lisa; Baier, Christel; Klein, Joachim: *Parametric Markov Chains: PCTL Complexity and Fraction-free Gaussian Elimination*. In: GandALF. Jgg. 256 in EPTCS, S. 16–30, 2017.
- [HHZ11] Hahn, Ernst Moritz; Hermanns, Holger; Zhang, Lijun: *Probabilistic reachability for parametric Markov models*. STTT, 13(1):3–19, 2011.
- [Ju18] Junges, Sebastian; Jansen, Nils; Wimmer, Ralf; Quatmann, Tim; Winterer, Leonore; Katoen, Joost-Pieter; Becker, Bernd: *Finite-State Controllers of POMDPs using Parameter Synthesis*. In: UAI. AUA Press, S. 519–529, 2018.
- [Ju20] Junges, Sebastian: *Parameter synthesis in Markov models*. Dissertation, RWTH Aachen University, Germany, 2020.
- [Me99] Meuleau, Nicolas; Kim, Kee-Eung; Kaelbling, Leslie Pack; Cassandra, Anthony R.: *Solving POMDPs by Searching the Space of Finite Policies*. In: UAI. Morgan Kaufmann, S. 417–426, 1999.
- [Qu16] Quatmann, Tim; Dehnert, Christian; Jansen, Nils; Junges, Sebastian; Katoen, Joost-Pieter: *Parameter Synthesis for Markov Models: Faster Than Ever*. In: ATVA. Jgg. 9938 in LNCS. Springer, S. 50–67, 2016.
- [RN10] Russell, Stuart J.; Norvig, Peter: *Artificial Intelligence – A Modern Approach* (3. ed.). Pearson Education, 2010.
- [Wi19] Winkler, Tobias; Junges, Sebastian; Pérez, Guillermo A.; Katoen, Joost-Pieter: *On the Complexity of Reachability in Parametric Markov Decision Processes*. In: CONCUR. Jgg. 140 in LIPIcs. Schloss Dagstuhl - LZI, S. 14:1–14:17, 2019.



Sebastian Junges wurde 1991 in den Niederlanden geboren und machte dort sein Abitur. Sein Studium absolvierte er an der RWTH Aachen, und schrieb dort seine Masterarbeit zur Fehlzustandsbaumanalyse. Nach dem Studium promovierte er an der RWTH Aachen im Bereich der Verifikation bei Prof. Dr. Joost-Pieter Katoen. Er ist einer der Entwickler des Model-Checkers Storm. Nach Abschluss der Promotion forscht er nun als Postdoctoral Researcher an der University of California im kalifornischen Berkeley zu Autonomie und Sicherheit von komplexen Systemen.