Über ein „Prinzip der strikten simultanen Rekursion“ beim Entwurf von Rechnerarchitekturen und -arithmetiken

Hans-Jürgen Brosch

Lowetscher Str. 2
99089 Erfurt
juergen.brosch@online.de

Abstract: Über eine Mitte 1988 begonnene Studienarbeit zum Entwurf digitaler Verarbeitungsprinzipien der Numerik am Institut für Informatik und Rechentechnik der ADW, über ihre Orientierung und Ergebnisse, den thematischen Bruch durch die Wende und den Abbruch bei der Auflösung des Instituts wird unter heutiger - durch viele spätere Erkenntnisse bereicherter - Sicht berichtet. Erkenntnisse über Zusammenhänge der phänomenologischen und abstrakten Modellierung und über die algebraischen Grundlagen des effizienten maschinellen Rechnens bilden den zweiten Teil des Berichtes. Ihre Verwendung in Theorie und Lehre heute wäre ein kleines Stück dessen, was von der Informatik in der DDR bliebe.

1 Einleitung

Die Arbeitsaufgabe am Institut für Informatik und Rechentechnik hatte zwei Phasen, über drei Phasen in der Entwicklung des Prinzips der strikten simultanen Rekursion wird aber berichtet. Sie hatte anfänglich einen zwiespältigen Charakter, der einerseits auf die Herausarbeitung der inhaltlichen Orientierung der weiteren Architekturforschung am Institut und andererseits auf die Auslotung von Möglichkeiten eines von der Arithmetik ausgehenden Entwurfs von Architekturen orientiert war, nicht nur in der Nachfolge für die DDR Entwicklung des Matrixmoduls - sondern auch in Bezug auf den zukünftigen Entwurf von arithmetisch orientierten eingebetteten Systemen.
Die persönliche Ansicht über die Motivation dieser Forschungsarbeiten am Institut, die weitere Profilierung der Arbeit an Hand der ersten Ergebnisse, die Orientierung auf die strikte simultane Rekursion als ein Wirkprinzip beim Entwurf von arithmetischen Einheiten in Rechnern und die Schilderung der Arbeitsatmosphäre am Institut sind Gegenstand des zweiten Kapitels.
Bei allem Erkenntnisfortschritt blieben nach eineinhalb Jahren zur Zeit der Wende mehr Fragen offen als Antworten gefunden waren. Die Skizzierung der Umorientierung auf Entwurfsmethoden für komplexe Arithmetikeinheiten in der Folge des Wegfalls wesentlicher Motive mit der Wende, der situationsbedingt bescheidene Fortschritt der Arbeit an Entwurfmethoden in den eineinhalb folgenden Jahren und die erfolglosen Bemühungen um die Fortsetzung der Arbeiten im Rahmen von Förderprogrammen oder durch Überleitung zu Unternehmen sind Gegenstand des dritten Kapitels.

Das vierte Kapitel schildert die Ergebnisse des Nachdenkens über die wissenschaftlichen Hintergründe der noch nicht gelösten Probleme in der Arbeit am Institut, insbesondere über Methoden der algebraischen Modellierung in der Informatik, über die axiomatischen Grundlagen effizienten Rechnens und über die Rolle intuitionistischen Denkens in der Informatik während der vielen Jahre des Rentnerdaseins.

2 Arbeitsinhalt und Ergebnis 1988 bis 1991

2.1 Die Motive für die Thematik

Die ab Mitte 1988 bearbeitete Studie war Teil des langfristig unter Einbeziehung von Mitarbeitern aus der Industrie geplanten Aufbaus der Architekturforschung im Institut für Informatik und Rechentechnik. Dieser sollte die vorwiegend zweckgerichteten Architekturarbeiten am Institut ergänzen, meines Erachtens vor allem um

- die aus der wirtschaftlichen Situation und der nahezu totalen Vorbildorientierung in der Industrie resultierende weitgehende Einstellung der Forschungsarbeiten in der Industrie mindestens auf längere Sicht teilweise zu kompensieren,
- wenigstens auf Teilgebieten schöpferische Beiträge in die internationale Forschung einzubringen und dazu beizutragen, ein (weiteres) Absinken des wissenschaftlichen Niveaus zu verhindern
- Chancen für eine Weiterführung der Matrixmodul-Linien im Rahmen des ESER und für eine flexible Reaktion auf Anforderungen der Industrie - insbesondere für den Entwurf eingebettete Systeme - aufrechtzuerhalten
- wenigstens beschränkte Fähigkeiten für eigene Wege im Rahmen gemeinschaftlicher Arbeit des RGW bereitzuhalten. (Wie berechtigt dieses Anliegen war, zeigt heute die dramatisch gewordene Monopolisierung der informationstechnologischen Potenzen).

Damals war nicht abzusehen, dass die Spiele-PC-Ausstattung der Kinderzimmer eine solche gewaltige Auswirkung zeigt und viele Architekturforschungen wertlos machen würde - oder wir haben es nicht erkannt.

2.1 Die Arbeiten bis Mitte 1990

Die Tragfähigkeit eines selbst gewählten bottom-up-Ansatzes für Architekturkonzepte – also ein Rückschließen von der Arithmetik/Logik auf die Gestaltung oder die Ausgestaltung der Rechnerarchitektur war zu untersuchen. Die anfänglichen Arbeiten führten zu dem Schluss, dass

- eine theoretisch untermauerte Systematisierung der Computerarithmetik-Varianten zwingend ist, um eigene Vorschläge abzugrenzen und zu patentieren,
- die bottom-up-Analyse eine gute Methode bei der großen Breite des Gebietes – vom Superrechner über Spezialrechnerarchitekturen bis zu eingebetteten Systemen war und auch für die Synthese, den Entwurf, gute Grundlagen liefert,

- Techniken und Verfahren heranreifen (Computeralgebra, Entwurfs- und Layoutsysteme), die durchgehend berechenbare Entwürfe für dieses Gebiet ermöglichen werden,
- Einflüsse auf das ganze Architekturkonzept entstehen werden, wenn die Fähigkeiten von Zählern, zwischen abstrakten Ebenen unterschiedlicher (technischer) Arbeitsfrequenzen zu transformieren, genutzt werden um z. B. hierarchische Pipeline-Systeme zu konstruieren. Prozesse der Linearalgebra und der Signalverarbeitung bieten beste Voraussetzungen für die Nutzung solcher Effekte.
- große Vorteile aus der sich entwickelnden Technologie dreidimensionaler Schaltungstechnik im Festkörper für das ins Auge gefasste PSSR entstünden.

Als eigenes Ordnungsprinzip für die Vielfalt effizienter komplexer Arithmetiken hat sich bewährt, von der Art der Realisierung arithmetischer Funktionen mit elementaren Operationen auszugehen und diese nach den Graden ihrer Striktheit und Simultanität (also Vielfachheit, Tiefe und Kompliziertheit des Rückgriffs auf vorher Berechnetes) bei der Ausführung rekursiver bzw. iterativer Berechnungen zu unterscheiden. Das Ordnungsprinzip wurde daher als bottom-up-Konstruktionsmethode für effiziente Verarbeitungsverfahren (mit verschiedenen Realisierungsvarianten in Arithmetik und Architektur) gewählt: es sind möglichst strikte und möglichst simultane Rekursionen zu verwirklichen. Dieses Ordnungsprinzips wurde auch Basis der "Prinzip der strikten simultanen Rekursion" genannten Entwurfs-Methode für Arithmetiken zur Bewältigung linearer algebraischer Probleme. Die algebraischen Individuen einer vektoralgebraischen Darstellung werden im Abstieg eines rekursiv gedachten Entwurfsprozesses sukzessiv durch die Substitution paralleler und/oder linear-rekursiver Darstellungen bis zum binären Niveau herab dekomponiert. Es entsteht das abstrakte Modell einer rekursiven Folge mehrdimensional mehr oder weniger hoch strukturierter Elementaroperationen - eine Sequenz von „Strukturoperationen“ oder -verknüpfungen. Wurde dabei eine Hierarchie nichtlinearer Rekursionen (wie bei Zahlendarstellungen) dekomponiert, so bilden die dadurch entstandenen Abhängigkeiten in dieser Modellstruktur räumlich-zeitliche Nachbarschaften. Diese werden entsprechend den Fähigkeiten und Eignungen der elementaren arithmetischen Funktionen zu mehrstelligen atomaren Verknüpfungen zusammengefasst. Die resultierende Struktur der Knoten bestimmt im rekursiven Wiederaufstieg des Entwurfsverfahrens die topologische und algorithmische Struktur des transformierten Verarbeitungsmodells für den jeweiligen Anwendungsfall. Die Restriktionen durch Nichtlinearitäten der Definition von Zahlendarstellungen auf den niederen Ebenen werden dabei auf die höheren übertragen. In diesem Fall realisiert das PSSR eine direkte Abb. der Verknüpfungen einer Algebra hohen Niveaus auf das Niveau der binären Operationen.
Das PSSR ist auch ein Sammelbegriff für insbesondere in der Signalverarbeitung oft angewendete Methoden der Umwandlung einer Rekurrenz von Wertfolgerekursionen in zwei verschiedene oder in eine Abfolge von jeweils zwei unterschiedlichen Phasen. Die jeweils erste Phase ist eine der stellenweisen Akkumulation und die zweite eine Phase der Reproduktion einer Darstellung. Auch Überlegungen über die Einbindung schneller Arithmetiken in Spezialarchitekturen und über "im Fluge konfigurierbare" Arithmetiken, die eine ausgeglichen effiziente Verarbeitung paralleler und sequenzieller Verknüpfungsfolgen leisten könnten, führten zum PSSR. Die auf der Basis hoch paralleler Strukturen von Sequenzial- und/oder Parallelzählern skizzierten Arithmetiken und darauf fußenden Architekturen hatten nach dem damaligen Stand die Chance, in der Flexibilität

sowie in Spezialfällen auch in der Verarbeitungsgeschwindigkeit die aktuellen Pipelinelösungen zu übertreffen. Für universell und variabel auszulegende Arithmetiken wurden strikt simultan rekursiv eingesetzte Parallelzähler als günstig eingeschätzt, besonders bei „logic in memory“-ähnlichen Entwurfsskizzen. Für die Signalverarbeitung mit extrem hohem Datenfluss versprachen serialzählerbasierte Arithmetiken Vorteile, besonders wenn die Frequenzteiler- und/oder Seriell-Parallel-Wandler-Eigenschaften der Zähler genutzt werden.
Mehrere Varianten für Arithmetiken und Architektureinordnungen entstanden als Grobentwürfe, zwei damals zur Diskussion genutzte Skizzen seien als Beispiele angeführt.

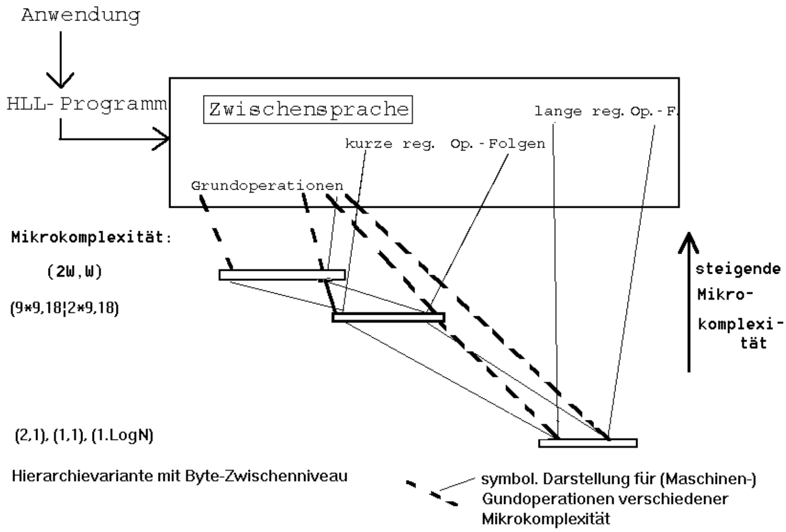


Abbildung 1: Architekturschema-Skizze

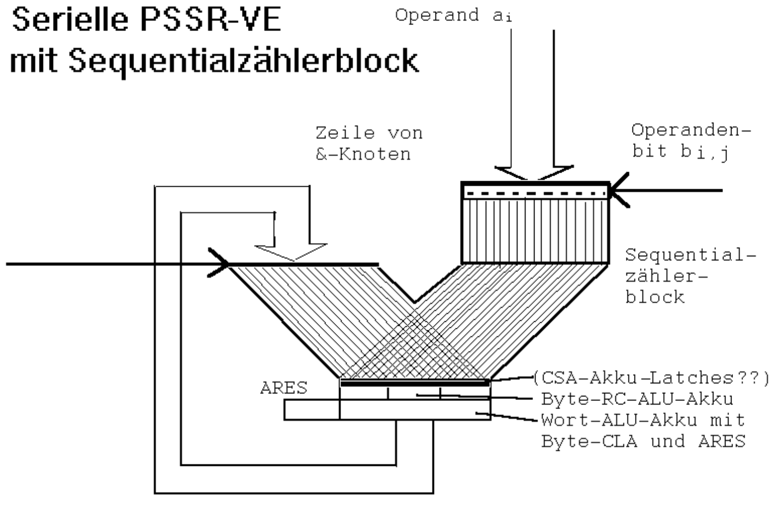


Abbildung 2: Blockschemata einer Serialzähler-Verarbeitungseinheit

Besonderes Augenmerk galt einer Arithmetik mit Kombination von Parallel- und Sequenzverarbeitung. Eine Variante wurde ausgearbeitet und teilweise mittels Assembler und Pascal bezüglich der „verlässlichen“ Funktionsweise simuliert. Die Prüfung dieser und einige anderer Lösungen bezüglich Patentfähigkeit war begonnen, ebenso die Systematisierung der Arithmetik-Prinzipien in einer mehrdimensionalen Tabelle. Mit der Ausarbeitung der Direktabbildungsmethode entwickelte sich die Vorstellung, ein Entwurfskonzept für numerische Komponenten zu entwickeln, das eine vektoralgebraische Beschreibung rechnend direkt auf das binäre Niveau abbildet und die Untersetzung damit also nicht über die „Implementierung in einer anderen Algebra“ erfolgt.

2.2 Die Arbeitsatmosphäre und -bedingungen am Institut

Als zuletzt aus einem Produktionsbetrieb des Kombinates Robotron Kommender fand ich am IIR für Studien-Arbeiten gute „gefühlte“ Verhältnisse vor: eine für unsere Bedingungen ordentlich ausgestattete Bibliothek; gute Unterstützung durch die Leitung; ein ausgezeichnetes junges Kollektiv, das auch einem Älteren aufgeschlossen zuhörte. Ich fand intelligente Streiter, hatte Kollegen, die man nicht nur um Hilfe bitten konnte, sondern die einem auch einen Rat oder eine Literaturstelle unangefordert brachten. In den Bereichen, mit denen ich Kontakt hatte, gab es für den Einzelnen wirklich auch Freiräume für schöpferische Arbeit.
In Manchem waren die materiellen Bedingungen bescheiden – wir hatten keine Wohnungen in Berlin, die Reichsbahn habe ich auch nicht mehr gerne gehabt, der Zugang zu Rechnern für Simulationen war fast unmöglich - und die Beschaffung einer Kopie verursachte einen unverantwortlichen Aufwand. In diesen letzten Jahren der DDR stieß man oft auf die inzwischen erstarrte Bürokratie. Aber die Aufgabe und die Atmosphäre machten manches wett. Der entscheidende Mangel war das völlige Fehlen internationaler Kontakte und die daraus erwachsene Sterilität – man konnte sich nicht mit den anderen auf diesem Gebiet Tätigen wirklich messen und von ihnen nicht im Gespräch die unterschwelligen Informationen bekommen, von denen die Wissenschaft in entscheidendem Maße lebt. Nicht nur die Devisen fehlten, das überzogene Sicherheits- und Schutzkonzept der DDR wurde hier schon oft als Ursache genannt. So war und blieb ein entscheidender Defekt die mangelnde Kenntnis über den wirklichen „Stand der Technik“. Zweifellos wirkte auch die Dominanz militärischer Interessen an Computerarithmetik für Signalverarbeitung dabei mit.

3 Die Arbeiten ab Mitte 1990 bis zur Institutsauflösung

In die in keiner Weise abgeschlossene Arbeitsphase fielen die Ereignisse der Wende und dann der Beschluss zur Auflösung der ADW. Das hat naturgemäß zu einer Desorientierung geführt. Die aus der Situation der DDR und des RGW resultierenden Motive für das Thema lösten sich auf. Die fruchtlosen Bemühungen um die Fortführung im Rahmen der Förderprogramme kosteten Zeit sowie Kraft und die Unsicherheit bremste zusätzlich den inhaltlichen Fortschritt der Arbeit in der Zeit bis zur Auflösung des Instituts.
Die Weiterentwicklung des PSSR in dieser Zeit bestand u. a. in der verfahrensmäßigen Einbeziehung des Zugriffs auf als Nachbarn in Shiftketten vorliegende aktuelle Bitlevel-

Operanden im Sinne eines Rückgriffs auf Vorgänger, womit man beispielsweise die Matrizenmultiplikation oder auch ein einzelnes Skalarprodukt nach den bekannten Skewing-Algorithmen der linearen Algebra berechnen kann (dekomponiert auf das Ziffern- oder Bitniveau). Das ist eine für die Bewältigung der hochfrequenten Datenzubringung ganz wichtige Erweiterung des Spektrums von PPSR-Architekturmerkmalen. Mit diesem Postulat werden solche Algorithmen und die systolischen Arrays Beispiele für die Gültigkeit des PSSR als relativ allgemeines Prinzip.
Da die Forschungsorgane der BRD kein Interesse für die architekturorientierten Arbeiten zeigten, wurde der Inhalt der Arbeit systematisch auf die Vertiefung der Grundlagen für eine Entwurfsmethode ausgerichtet. Fernziel war die Schaffung von Entwurfssystemen mit „Anschluss“ an die Computeralgebra einerseits und an Layoutsysteme andererseits. Ein Entwurfssystem erforderte eine größere lückenlose Einbeziehung der arithmetischen Möglichkeiten in das theoretische Konzept. Unzulänglichkeiten der damaligen Ausgestaltung der Transformation – sie erfasste nur die akkumulierenden Phasen im mathematischen Kalkül – waren unbefriedigend und wurden hinderlich. Noch nicht abgeschlossen war die Einordnung arithmetischer Konzepte wie Carry-Skip- und Carry-Select-Adder, Online-Arithmetik u.s.w. Besonders unbefriedigend war, dass die als besonders leistungsfähig bekannten Verfahren der schnellen Fouriertransformation, des Karatsuba-Baumes und andere nicht Bestandteil des PSSR-Konzeptes waren.
Zur Beantwortung dieser und anderer Fragen kam es nicht mehr in der Arbeit am IIR der ADW.
Ich persönlich hatte den Eindruck, dass die Evaluierungskommission, in der ja fast nur Konkurrenten um die knappen Fördermittel mitwirkten, von vornherein von der Abwicklung des Instituts überzeugt war. Die Berliner Industrie war an den gut ausgebildeten jungen Mitarbeitern interessiert. Zu den Gutachtern für Förderprogramme habe ich mein Vorhaben wohl nicht gut genug „herübergebracht“ - und ein Sozialfall war ich als möglicher Alterübergangsgeldbezieher auch nicht. Das WIP kam nicht in Frage, die Universitäten des Ostens entließen damals Mitarbeiter, die viel jünger waren. Für die um ihre Neuprofilierung und um das Überleben ringenden industriellen Einrichtungen war der Stand der Arbeiten nicht reif genug. Alle Versuche schlugen fehl.
Das Vorhaben „PSSR“ reihte sich ein in die Kette nicht vollendeter Forschungsvorhaben.

4 „Informatik nach der DDR“ als Hobby

4.1 Offen gebliebene Fragen

Irgendwann in den Jahren danach lebte das PSSR wieder auf – als Hobby. Es trieb die Neugier auf Antworten auf die offen gebliebenen theoretischen Kernfragen:

- worin bestehen bei kanonisch formulierten Modellen überhaupt die Möglichkeiten, effizienter zu rechnen als es der durch das termalgebraische Modell vorgegebene Algorithmus ermöglicht?
- lässt sich der intuitionistische Ansatz "Ausklammerung der Stellenwert-Struktur" zu einem fundierten, durchgängig berechenbaren Modell ausbauen?

- wo liegt die Ursache dafür, dass die Polynomdarstellung der Zahlen und die Exponentialform der komplexen Zahlen eine so fundamentale Rolle in effizienten Berechnungsverfahren spielen und welchen Zusammenhang gibt es zwischen diesen und der dem PSSR zu Grunde liegenden These vom strikt simultanen Rückgriff auf Vorberechnetes?
- liegt gar einerseits in der ideellen Verbindung der phänomenologischen Modelle statischer wie dynamischer Systeme mit ihren Relationen zwischen Eigenschaften und andererseits den axiomatischen Grundlagen unserer mentalen, formalen Modelle der Schlüssel für das Verständnis der Zusammenhänge zwischen den mathematischen Konzepten und den unterschiedlichen Methoden, effizientes Rechnen zu erreichen?

Für den Autor und das PSSR scheinen die Antworten gefunden zu sein. Sie werden - aus Platzgründen nur thesenhaft - in den Abschnitten 4.2, 4.3 und 4.4 wiedergegeben. Möglicherweise ist das den Theoretikern auch in diesen Zusammenhängen als Trivialität gegenwärtig. Es ist ja nur eine andere Sicht auf Bekanntes. In den durchgesehenen Lehrbüchern fand ich es so nicht. Das hier Darzustellende würde sicher auch Anderen den Zugang zu Zusammenhängen zwischen den mathematischen Konzepten in der Informatik erleichtern und vor allem für die Ausbildung nützlich sein.

4.2 Grundlagen des effektiven und effizienten Rechnens.

Die mit der Entwicklung von Arithmetiken und Algorithmen gestellte Frage ist die nach einer möglichst effizienten Reduktion des hoch redundanten Anteils eines als termalgebraische Relation formulierten Modells. Ein einfaches Beispiel ist die wichtigste komplexe Operation der linearen Algebra - die Auswertung eines Skalarprodukts über die Relation zwischen dem Zahlenwert des Ergebnisses einerseits und der als nicht reduzierbar angesehenen Summe von Produkten andererseits - für die ein effizienter Weg gefunden werden soll. Die Relation wird als erfüllt angesehen, während alle Variablen in der Darstellung zum Beispiel nicht belegt sind, was in diesem Falle die Nichtreduzierbarkeit ausmacht. Als zweites Beispiel sei das Produkt zweier Zahlen in polynomialer Darstellung angeführt, dessen Ergebnis ebenfalls bekannt sei. Die Polynomdarstellung dient dazu, mit Zahlen aus großen Zahlenbereichen überhaupt effektiv rechnen zu können. Sind die Darstellungen gewöhnliche Polynome, dann sorgt die Unbekannte x für die Nichtreduzierbarkeit der Terme, sind es Stellenwert-Darstellungen so ist es die nichtlineare Definition der Darstellung über der begrenzten Menge der Ziffern zur Basis B.
Bei der Auswertung eines solchen kanonischen Modells kann eine höhere Effizienz nur auf zweierlei Weise erreicht werden:

- durch Ausnutzung von Eigenschaften der ersten Verknüpfungen (z. B. Addition) einer Algebra, nachdem die höher priorisierten Operationen symbolisch „realisiert“ sind,
- durch Ausnutzung der Eigenschaften von Verknüpfungsebenen, die nach Substitution von Darstellungen für die Individuen der Algebra, also nach Transformation auf eine andere Algebra, entstehen.

Zu der ersten Kategorie gehören die DFT, die FFT und auch der Karatsuba-Algorithmus, zu der zweiten diejenigen arithmetischen Konzepte, die in der ursprünglichen Direktabbildung des PSSR als strikt simultane Rekursion auf elementarer Ebene behandelt wurden. Ein verallgemeinertes Modell muss beides erfassen. Bei einem PSSR-Modell wird vorausgesetzt, dass eine algebraische berechnende Transformation zwischen den algebraischen Ebenen möglich ist. Auch im Weiteren wird immer von der PSSR-Modellierung gesprochen, weil die Ausführungen keinen Anspruch darauf erheben, von größerer Allgemeingültigkeit zu sein.

4.3 Der top-down-Prozess der PSSR-Modellierung.

Die Mängel des älteren Modellierungskonzeptes veranlassten zu einer besser fundamentierten Analyse des top-down- und des bottom-up-Vorgehens bei der Modellierung. Das top-down ist als eine Verallgemeinerung und Algebraisierung des Gedankens der "Ausklammerung der Stellenwertstruktur" und das bottom-up als eine solche für die auf Bitniveau formulierte Strategie des Rückgriffs auf Vorberechnetes zu sehen. Man kann es auch als einen großen rekursiven Prozess betrachten, bei dem im rekursiven Abwärtsgehen die algebraischen Strukturen hohen Niveaus durch das Einsetzen ihrer Darstellungen in Elementen einer niederen Algebra schrittweise auf die Ebenen der Realisierung dekomponiert werden. Danach werden im weiteren Abwärtsschreiten für diese Ebenen die realisierenden Operationen auf die elementaren Grundlagen von Berechnungstheorien zurückgeführt. Im Wiederaufstieg sind die Bedingungen für den optimalen effizienten Einsatz der realisierenden Operationen zu ermitteln und effiziente Verfahren für die jeweiligen Ebenen zu suchen, wobei gleichzeitig die Restriktionen der niederen Ebenen, die aus beschränkten Mengen und nichtlinearen Definitionen entstehen, das auf höchste abstrakte Niveau des Modells abgebildet werden.
Aus dem phänomenologischen Modell der Anwendung wird auf derjenigen Ebene, auf der eine Transformation erfolgen soll, an das Konzept der Informatik "Ergebnis ist Operationen über Daten" anknüpfend ein formales Modell entwickelt, dessen Typ

*Ergebnisstruktur = Operatorenstruktur*Operandenstruktur*

sein soll. Dahinein fließt als allgemeine Erfahrung zur Modellierung, dass

- in phänomenologischen Modellen die Semantik der Eigenschaften den Charakter der Verknüpfungen bestimmt (Addition bei gleicher Semantik, Multiplikation bei verschiedener),
- die Abstraktion von Semantik „im Hintergrund wirkt“ und die Semantik bzw. der Kontext sich in Namen von Variablen und in der Definitionen zulässiger Verknüpfungen versteckt,
- die verschiedenen Typen von Vektoralgebren aus der semantischen Separation bzw. formalen Faktorisierung multiplikativer Verknüpfungen von nichtreduzierbaren Termen der Termalgebra entstehen und nur der abstrakte Vektorraum als solcher eine Abstraktion von jedem Bezug darstellt – es also für die Modellierung wichtige Relationen zwischen Term- und Vektoralgebren gibt,
- die semantikorientierte Separation als Verallgemeinerung der formalen Faktorisierung die geeignete Grundlage für das obige Operatoren-Operanden-Relationen-Modell darstellt. Auch Polynome werden als semantisch separierbar

angesehen und in dieser Weise in Strukturen von Koeffizienten und Potenzen dekomponiert,

- mit dem Ziel der Allanwendbarkeit statische wie dynamische Systeme mit dem obigen Operatorenmodell beschrieben werden können und müssen,
- in der Verknüpfung von Operatoren- und Operandenstruktur stets beide Strukturen simultan manipuliert werden müssen. Die Schritte der Manipulation dienen dem Ziel, die redundante, durch die Verknüpfung gekennzeichnete Seite der Relation der nicht redundanten Ergebnisstruktur der anderen Seite schrittweise anzugleichen.

Zu dem letztgenannten Vorgehen, das ein Schritt in Richtung der Algebraisierung der Ausklammerung von Stellenwertstrukturen darstellt, sei als Beispiel die Summation von Bitvektoren bei der Berechnung der Summe von Zahlen mit Hilfe von Tabellen erläutert. Die Operandenstruktur vor der Reduktion ist in der linken Tabelle gegeben. Auf der rechten Seite wird die Operandenstruktur nach der Reduktion gezeigt. Die Stellenwertstrukturen sind durch die Randzeilen und –spalten angedeutet. Dieses einfache Beispiel muss hier genügen. Später wird im Zusammenhang mit der Anwendung der Fouriertransformation beim Polynomprodukt ein noch instruktiveres Beispiel genannt.

Summe von 16 binär codierten Ziffernvektoren
Die zu zählenden Binärziffern in den Zeilen mit den Ziffern $\alpha_{i,k}$

			1	1				1		1			1			2^7
	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2^6
				1											1	2^5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2^4
1		1		1		1	1	1	1		1		1	1	1	2^3
				1								1				2^2
																2^1
1		1		1		1			1			1			1	2^0
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	

Horizontale Stellenwertstruktur; Eins-Vektor als Summationsoperator

Belegung der Akkumulatorstellen

0	0	0	1	0	1	[illegible]
1	1	1	1	0	1	[illegible]
0	0	0	0	1	0	[illegible]
1	1	1	1	1	1	[illegible]
0	0	1	0	1	1	[illegible]
0	0	0	0	1	0	[illegible]
0	0	0	0	0	0	[illegible]
0	0	0	1	1	1	[illegible]
2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	

Akkumulator-Stellenwertstruktur
Beachte die „Produktstruktur"

4.4 Der bottom-up-Prozess der PSSR-Modellierung.

Dass termalgebraische Modellrelationen nur innerhalb von Verknüpfungen zwischen nichtreduzierbaren Termen reduziert werden können, wirft die Frage nach den Eigenschaften der Algebren auf, in denen diese Terme beschrieben sind. Die berechnungstheoretischen Grundlagen seien betrachtet.

Die Berechenbarkeitstheorie liefert mit den Konzepten der primitiven Rekursion und der μ-Rekursion die Basis. Aus ihr fließen Folgerungen über den Aufbau der algebraischen Zahlentypen und über die Hierarchie der Verknüpfungen (Addition, Multiplikation, Potenzierung). So entstehen durch die induktive Anwendung der einstelligen Operation der primitiven Rekursion jeweils über einer Konstanten die arithmetischen Grundfunktionen. Diese Grundfunktionen

- bilden die Voraussetzung für das Rechnen in großen Zahlenbereichen und gewährleisten mittels ihrer Rolle in Zahlendarstellungen das effektive Rechnen, weil sie unmittelbar zwischen zwei linear geordnerten Mengen abbilden, die in erster Ordnung rekursiv definiert sind.

- besitzen Konstanz-Eigenschaften (z. B. Krümmung), welche die Grundlage ihrer "arithmetischen Theoreme" und des effektiven Rechnens bilden.
- können als direkt in erster Ordnung rekursiv definierte Funktionen nur monotone diskrete Folgen von Funktionswerten generieren.
- Definieren keine Stellenwert- und Modul-Darstellungen von Zahlen, weil diese ihrer Generierung entsprechend zu den μ-rekursiv definierten berechenbaren Funktionen gehören.

Als auf die Berechenbarkeitstheorie aufbauende Grundlage für die effiziente Berechenbarkeit in Modellen wird die Möglichkeit angesehen,

1. das polynomiale Kodieren als eine auf der Erfahrung des modularen Zählens aufbauende Grundfunktionen zu akzeptieren,
2. nichtmonotone Grundfunktionen durch axiomatisch fundierte simultane Induktion zu generieren.

Zu 1. Auf der binären Ebene kommen die Zähler als realisierende elementare Funktionen zum Einsatz. Ihre Funktionalität ist die binäre Codierung, die auch rekursiv genutzt wird. Im rekursiven Einsatz effizient sind nur solche Anwendungen von Zählern, die eine vollständige Rekursivität gewährleisten, indem die Stelligkeit der Verknüpfung durch die Addition und die Rekursion systematisch voll genutzt wird. Dafür sind die 7-Bit- und die 3-Bit-Zähler allein oder als Kette günstig, weil sie redundanzfrei sowohl im asymmetrischen wie auch im symmetrischen Baum (letzteres als Kette zur Reduktion von vier Eingängen auf zwei Ausgänge) eingesetzt werden können. Sie sind im Sinne des PSSR effizient.
Zu 2. Für die effiziente formale Modellierung dynamischer Phänomene sind effizient berechenbare nichtmonotone Funktionen Voraussetzung. Wenn die monotonen Grundfunktionen mit ihren Konstanzeigenschaften das effektive Rechnen bewirken, weil sie direkt induktiv definiert sind, muss erwartet werden, dass für effizientes Rechnen mit dynamischen Modellen induktiv generierte nichtmonotone Grundfunktionen von Bedeutung sind. Sie müssen wie die monotonen Grundfunktionen Konstanzeigenschaften besitzen, welche zu arithmetischen Berechnungstheoremen führen.
Nichtmonotone Funktionen durch Induktion zu gewinnen erfordert die Akzeptanz der Erfahrung von Wirkung und Gegenwirkung in der Realität. Ein Generierungsaxiom („nur aus Axiomen und bereits Definierten kann Neues gewonnen werden“) erlaubt die Generierung in Abhängigkeit von allen Vorgängern. Damit die Induktion über den natürlichen Zahlen wegen einer wachsenden Zahl von Abhängigkeiten nicht „explodiert“, kann nur eine solche Abhängigkeit als Modell dienen, bei der diese Zahl klein ist und konstant bleibt. Es wird deshalb von vornherein ein strikt simultaner Ansatz für die Rekursion gemacht und ggf. dann deren Rückgriff auf alle Vorgänger bestimmt.
In der Algebra der Arithmetik kann aus Prioritätsgründen der „Zugriff“ auf Vorgänger nur über multiplikative und die Verknüpfung der Zugriffe nur durch additive Operationen erfolgen. Statt einer multiplikativen Iteration über einer Konstanten x wie bei der Generierung einer Folge von Potenzwerten ist unter Annahme der Gegenwirkung des zweiten Vorgängers eine Induktion über einer Summe mit einer Summe von Konstanten als Faktor auszuführen.

Gefordert ist demnach die Zuweisung $x_1 = x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2$

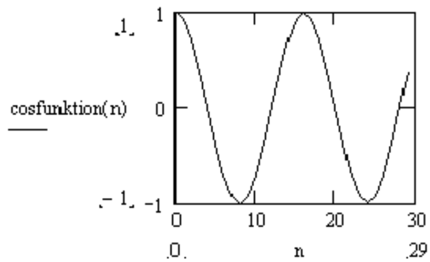
.

Um dieses durch arithmetische multiplikative Induktion zu bewerkstelligen, ist die Einführung der komplexen Zahl das Mittel der Mathematik. Die Iteration ist dann

$$x \leftarrow x \cdot y \quad mit \quad x = (x_1 + i \cdot x_2) \quad und \quad y = (y_1 + i \cdot y_2)\,.$$

Das geforderte Ergebnis ist der Realteil, der aus der Induktion entspringt. Das ist in einer Routine einfach zu simulieren. Mit der Iterationskonstanten y_1 wird auf den unmittelbaren Vorgänger als Verknüpfungspartner zugegriffen, mit der Konstanten y_2 auf den zweiten Vorgänger. Anfangswert für die Iteration über dem zu berechnenden Wert x_1 ist 1, für den „Vorgänger“ x_1 ist der Anfangswert natürlich gleich 0.
Die Forderung nach Konstanzeigenschaften für nicht monotone Grundfunktionen führt auf das Modell harmonischer Funktionen als Projektion des Kreises und erlaubt es, über den Pythagoras die Generierungskonstanten so zu bestimmen, dass mit einer Routine mit dem nachfolgend angegebenen Schleifenkern die Kosinusfunktion generiert wird.

$$\begin{array}{l} \mathrm{for}\ k \in 0..(i-1) \\ \left\| \begin{array}{l} xNeu_1 \leftarrow x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 \\ x_2 \leftarrow x_2 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 \\ x_1 \leftarrow xNeu_1 \end{array} \right. \end{array}$$



Die imaginäre Zahl i kann als "Bypass-Quelle-" und „Bypass-Senke-Operator“ oder als Merkmal einer nicht in das aktuelle Ergebnis eingerechneten Hilfsvariablen (Speichervariablen) interpretiert werden. Die multiplikative Verknüpfung zweier komplexer Zahlen symbolisiert also eine aktuelle Verknüpfung, die von der Vorgeschichte abhängig ist. Abstrahiert man von der Generierung und von der Rolle des negativ eingehenden Produkts als Rückgriff auf den zweiten Vorgänger, dann muss man diese Verknüpfung (von Realteilen) als kontextabhängige Verknüpfungen interpretieren. (Man denke an den Kontext im schwingenden System.)
Definiert man in gewohnter Weise die über der Menge der reellen Zahlen generierten komplexen Zahlen als Elemente der neuen Menge C, dann hat man einen direkten diskreten Weg zu dieser Menge. Implizit erzeugt die Routine als Imaginärteil die Sinusfunktion.
Damit ist obige Routine mit Konstanten, die sich aus der rekursiven Zweiteilung des Vollkreises ergeben, auch die Grundlage für die direkte induktive Generierung der diskreten komplexen Exponentialfunktion. Die Multiplikation ist die erste Verknüpfung in einer darauf basierenden Algebra. Daher kommt sicher ihre hohe Effizienz im Modell der "komplexen Wechselstromrechnung“.
Als fortgesetzte Drehung eines gegebenen Zeigers ist die Konstanten-Iteration eigentlich überall bekannt und hat in der Moivreschen Formel Niederschlag gefunden. Diese Induktion als strikt simultan rekursive Generierung zu betrachten, hat aber doch grundlegende Bedeutung. Die Erweiterung durch Einbeziehung der dritten, dann der vierten Vorgänger mittels verknüpfter imaginärer Zahlen, die auch wieder imaginäre Zahlen erzeugen, entstehen die hyperkomplexen Zahlen. Der „Bypass über zwischenliegende

Vorgänger" erklärt auch (durch die erforderlichen Relationen bei der Generierung neuer imaginärer Einheiten, z. B. für das Quaternion als i*j=k), warum es in der Reihenfolge (Komplexe Zahl, Quaternion, Oktion,...) jeweils (1, 3, 7,...) imaginäre Zahlen und eine reelle Zahl gibt. Es entsteht die Vermutung, dass die Effizienz des Einsatzes von Quaternionen z. B. in der Computergrafik auf diese Definition durch Generierung zurückzuführen ist. Interessant ist die Tatsache, dass die redundanzfreie Verkettung von Zahlen auch mit der Folge (1, 3, 7) zusammenhängt.
Die komplexe Exponentialfunktion als strikt simultane Grundfunktion besitzt zwei Konstanten, den arithmetischen Mittelwert und den quadratischen Mittelwert - jeweils über beliebig viele ganze Perioden. Das Multiplikationstheorem ermöglicht es, durch die Multiplikation zweier gegenläufiger Drehungen die Exponentialformdarstellung der Deltafunktion zu konstruieren, die sich als Mittel für eine Transformation aus der Abhängigkeit von allen Vorgängern zu der Abhängigkeit von allen Komponenten als direkte Vorgänger erweist.

Das wird in einem Beispiel für die PSSR-Modellierung bei der wichtigen Anwendung „Produkt zweier Polynome n-ten Grades" benutzt. Die diskrete Deltafunktion dient als "Transformationsgenerator" des semantischen separierten Produkts. Das Ergebnispolynom in der Modellrelation ist in diesem einfachen Fall ein Polynom (2n-1)-ten Grades. Seine Koeffizienten sind die so genannten Faltungssummen. Für die Transformation von Operatoren- und Operandenstruktur werden die Deltafunktionen den Partialprodukten in den beiden Strukturen als Faktoren beigefügt.

$$\Delta(j,k,l) = \frac{1}{N}\left[\sum_{n}\left[a_j \cdot b_k \cdot e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i\,(j+k-l)\cdot n}{N}}\right]\right]$$

Die PSSR-Modellierungsmethode führt mit dieser Hilfe direkt auf die diskrete Fouriertransformation. Das lässt den Schluss zu, dass die Fouriertransformation ebenfalls eine Übertragung der rekursiven Abhängigkeit von allen Vorgänger-Koeffizienten auf eine Abhängigkeit von allen transformierten Elementen in direkter, simultaner Vorgängerschaft erster Ordnung ist.
Schließlich ist die Transformation der DFT in die FFT als rekursive Faktorisierung der Transformationsmatrix eine Transformation auf eine simultane Rekursion erster Ordnung, die allerdings ein kompliziertes Verbindungsschema hat. Im Grunde genommen ist die FFT die Vernetzung von binären Bäumen und somit ein optimaler Rückgriff auf Vorberechnetes (und auf algebraisches Wissen).

Diese Ausführungen sollten andeuten, dass das Prinzip der strikten simultanen Rekursion viel weiter reicht als es der Autor ursprünglich angenommen hat. Es reicht bis in die axiomatischen Grundlagen hinein - und es lohnt sich, über die Zusammenhänge in der Modellierung diskreter Systeme von einem intuitionistischen Standpunkt aus nachzudenken. Das hilft dabei, diese wichtigen Zusammenhänge zu verstehen und sicher auch dabei, sie schöpferisch anzuwenden.

Sollte sich das Dargelegte in Diskussionen mit den Fachkollegen bewähren, so wäre es aus der egoistischen Sicht des Autors etwas Wichtiges, was aus einer kurzen Episode der Arbeit an der "Informatik in der DDR" bleiben würde.