

Binäre Rekonstruktionsmethoden für inverse Probleme

Florian Frühauf

Infmath Imaging
Universität Innsbruck
Technikerstrasse 21a/2
A-6020 Innsbruck
florian.fruehauf@uibk.ac.at

Abstract: In der Dissertation werden Methoden zur Lösung spezieller inverser Probleme untersucht. Typischerweise sind inverse Probleme schlecht gestellt. Ein gut gestelltes Problem erfüllt nach Hadamard die Eigenschaften, dass eine eindeutige Lösung existiert, die stetig von den Daten abhängt. Ist dies nicht der Fall nennt man das Problem schlecht gestellt. In vielen Anwendungen ist es nicht notwendig das inverse Problem im Detail zu lösen. Man ist nur an Gebieten interessiert, die sich in gewissen physikalischen Eigenschaften zur Umgebung unterscheiden. Beispielsweise sucht man in nicht destruktiven Testmethoden Löcher, Risse oder Inklusionen in einem Material. Wir bezeichnen diese Unterteilung des untersuchten Gebietes in Inklusion und Umgebung als binäre Teilung des Gebietes. In dieser Arbeit studieren wir drei verschiedene Methoden um diese binären inversen Probleme zu lösen.

1 Einführung

In der Industrie und Medizin stieg in den letzten Jahren die Wichtigkeit von inversen Problemen enorm an. Ein bekanntes Beispiel eines inversen Problems ist die Computer Tomographie. Hier wird eine Röntgenquelle um einen Körper bewegt und die resultierende Intensität des Röntgenstrahls gemessen. Diese Intensität gibt Aufschluß über die Abschwächung der Strahlung durch den untersuchten Körper. Diese Messungen bezeichnen das direkte Problem. Das inverse Problem besteht nun darin, das Innere des Körpers durch die Messungen der Intensitäten zu rekonstruieren. Dazu wird die sogenannte Radontransformation verwendet.

In dieser Arbeit löst man das inverse Problem nicht exakt, sondern man ist interessiert daran Regionen zu finden, die sich in gewissen physikalischen Eigenschaften unterscheiden. Dies wird in vielen Anwendungen benötigt, wie zum Beispiel das Finden von Minen im Boden. Ein medizinisches Beispiel wäre die Erkennung von Tumorzellen mit elektrischer Impedanztomographie, da die Leitfähigkeit von Tumorzellen größer ist als die von gesunden Zellen. Im Detail sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\Omega \subset B$ eine Teilmenge, in der sich bestimmte Eigenschaften bezüglich $Q := B \setminus \overline{\Omega}$ unterscheiden. In Abbildung 1 ist eine derartige Geometrie dargestellt. Das Ziel ist es die Inklusion Ω zu detektieren und dies führt zu einer binären Unterteilung des Gebietes B . Im folgenden werden drei Methoden



Abbildung 1: Darstellung einer binären Unterteilung des Gebietes B .

untersucht, die eine binäre Lösung eines inversen Problems liefern.

Die ersten beiden Methoden sind Regularisierungsverfahren. Im Allgemeinen führen Regularisierungsmethoden zu keiner binären Teilung. Deshalb betrachten wir ein inverses Problem mit Nebenbedingung. Diese Nebenbedingung erfüllen wir in der ersten Methode durch Einführung eines Projektionsoperators. Anschließend lösen wir das umformulierte Problem mittels spezieller Level Set Regularisierung, die ein Tikhonov- und ein Totalvariationsfunktional beinhaltet. Die erarbeitete Methode ist eine Erweiterung zur bestehenden Regularisierungstheorie, da wir eine Operatorgleichung betrachten, bei der der Operator zerlegt werden kann in einen nicht linearen stetigen und einen unstetigen Teil. Der zweite Zugang ist eine Relaxation des Problems indem wir ein Ginzburg-Landau Funktional in den Regularisierungsprozess einführen. Dieses Ginzburg-Landau Funktional erzwingt im Grenzfall eine binäre Teilung.

Als drittes wird eine Alternative zu Regularisierungsmethoden zur Erkennung von Inklusionen untersucht. Dies ist die so genannte Faktorisierungsmethode. Diese Methode vergleicht Messungen am Rand eines Körpers mit Inklusionen und Messungen auf einem Referenzkörper ohne Inklusion. Die Differenz dieser Paare von Messungen wird faktorisiert. Diese Faktorisierung erzeugt das Bild eines virtuellen Operators, der die Inklusion wie folgt charakterisiert. Geeignete singuläre Funktionen gehören zum Bild des Operators genau dann, wenn die Singularität innerhalb der Inklusion liegt. In der Dissertation wird diese Methode erstmals auf ein zeitabhängiges Problem erweitert.

2 Regularisierungsmethoden

Wir betrachten die schlecht gestellte Operatorgleichung

$$F(z) = y \quad (1)$$

mit $F : \text{dom}(F) \rightarrow Y$, wobei $\text{dom}(F) \subset X$ der Definitionsbereich von F ist. X ist ein Banachraum und Y ein Hilbertraum. Weiters sei $y^\delta \in Y$ eine Störung der Daten $y \in Y$ und wir nehmen an, dass

$$\|y - y^\delta\|_Y \leq \delta.$$

Wir sind nun daran interessiert eine stabile Lösung von (1) aus der Kenntnis von y^δ zu finden.

Da (1) schlecht gestellt ist, muß es keine Lösung geben beziehungsweise falls eine Lösung existiert muß diese nicht eindeutig sein. Weiters muß die Lösung nicht stetig von den Daten abhängen, so dass wir das schlecht gestellte Problem durch eine Familie von gut gestellten Problemen approximieren. Dadurch ist eine Möglichkeit gegeben eine Lösung auf einem stabilen Weg zu finden. Diese speziellen Methoden heißen Regularisierungsverfahren. In [EHN96, Kir96] wird das Konzept dieser Verfahren beschrieben.

Im folgenden sei F ein stetiger nicht linearer Operator und eine Lösung von (1) soll die Nebenbedingung erfüllen, dass sie in der Menge von zulässigen Funktionen

$$\mathcal{P} := \{z : z = 1 + \chi_\Omega\}$$

enthalten ist. Hier ist Ω eine Menge von endlichen Umfang und χ_Ω bezeichnet die charakteristische Funktion der Menge Ω . Eine Funktion $z \in \mathcal{P}$ ist im allgemeinen eine unstetige Funktion mit zwei Werten und dies repräsentiert eine binäre Zerlegung des Gebietes B . Weiters sei $L^p(B)$ die Menge der p -integrierbaren Funktion über B .

Im Abschnitt 2.1 wird eine Lösung der Operatorgleichung mit Nebenbedingung mit Level Set Methoden untersucht. Eine detaillierte Beschreibung dieser Methode ist in [FLS05]. Als nächstes benutzen wir das Ginzburg-Landau Funktional in der Regularisierungsprozedur um die Nebenbedingung zu erfüllen. Eine kurze Einführung dieses Verfahrens wird in Abschnitt 2.2 gegeben. Eine genau Untersuchung kann in [FG08] nachgeschlagen werden.

2.1 Level Set Regularisierung

Wir betrachten eine Level Set Methode um die Operatorgleichung (1) unter der Nebenbedingung, dass eine Lösung in \mathcal{P} enthalten ist. Dazu führen wir den Projektionsoperator

$$P : \begin{cases} H^1(B) & \rightarrow \mathcal{P} \\ \phi(\cdot) & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } \phi(\cdot) < 0 \\ 2 & \text{für } \phi(\cdot) \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

ein, wobei $H^1(B)$ der Sobolovraum der quadratintegrierbaren Funktion mit quadratintegrierbarer Ableitung ist. Nun schreiben wir das Problem mit Nebenbedingung um in ein Problem ohne Nebenbedingung, indem wir den Projektionsoperator in Gleichung (1) einführen, i.e.,

$$F(P(\phi)) = y. \tag{2}$$

Jetzt untersuchen wir eine schlecht gestellte Operatorgleichung ohne Nebenbedingung, wobei der Operator aufgeteilt werden kann in einen nicht linearen stetigen und einen unstetigen Teil. Man beachte, dass der analytische Umgang mit dem Operator $F \circ P$ schwierig ist, da P nicht schwach abgeschlossen und unstetig ist. Deshalb ist die Standardtheorie hier nicht anwendbar. Durch die Einführung eines neuen Konzepts eines Minimierers für Regularisierungsfunktionale ist es gelungen eine Konvergenzanalyse für derartige Operatoren

zu entwickeln. Dieser Zugang heißt Level Set Regularisierung, da der Rand eines Objektes durch die Level Sets einer Funktion gegeben ist.

Ein Standardverfahren um die schlecht gestellte Operatorgleichung (2) zu lösen ist die Tikhonovregularisierung. Das heißt wir minimieren das Funktional

$$\frac{1}{2} \|F(P(\phi)) - y^\delta\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2} \|\phi - \phi^*\|_{H^1(B)}^2$$

in $H^1(B)$, wobei $\phi^* \in H^1(B)$. Ein Minimierer ϕ_α dieses Funktionals wird als Grenzwert $\phi_\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_{\varepsilon, \alpha}$ im schwachen Sinne verstanden, wobei $\phi_{\varepsilon, \alpha}$ das Funktional

$$\frac{1}{2} \|F(P_\varepsilon(\phi)) - y^\delta\|_Y^2 + \frac{\alpha}{2} \|\phi - \phi^*\|_{H^1(B)}^2 \quad (3)$$

in $H^1(B)$ minimiert und

$$P_\varepsilon(\phi(\cdot)) := \begin{cases} 1 & \text{for } \phi(\cdot) < -\varepsilon, \\ 2 + \frac{\phi(\cdot)}{\varepsilon} & \text{for } \phi(\cdot) \in [-\varepsilon, 0], \\ 2 & \text{for } \phi(\cdot) > 0, \end{cases}$$

approximiert P für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Man kann nun zeigen, dass ein Minimierer $\phi_{\varepsilon, \alpha}$ existiert für alle $\phi^* \in H^1(B)$, $\alpha > 0$ und $\varepsilon > 0$. Allerdings gibt es keine analytische Begründung dafür, dass für eine Folge $(\phi_{\varepsilon_k, \alpha_k})_{k \in \mathbb{R}}$ mit $\varepsilon_k \rightarrow 0$ von Minimieren von (3) gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(\phi_{\varepsilon_k, \alpha_k}) \in \mathcal{P}.$$

Dies liegt daran, dass der Operator P nicht schwach abgeschlossen ist. Nehmen wir zusätzlich an, dass die Totalvariation $|P(\phi_{\varepsilon_k, \alpha_k})|$ beschränkt ist. Dann kann man zeigen, dass es eine konvergente Teilfolge von $(P(\phi_{\varepsilon_k, \alpha_k}))_{k \in \mathbb{R}}$ in $L^1(B)$ gibt und somit deren Grenzwert in \mathcal{P} enthalten ist.

Deshalb wird ein zusätzliches Regularisierungsfunktional in den Minimierungsprozeß eingebunden. Wir betrachten nun das Funktional

$$\frac{1}{2} \|F(P(\phi)) - y^\delta\|_Y^2 + \beta \alpha |P(\phi)| + \frac{\alpha}{2} \|\phi - \phi^*\|_{H^1(B)}^2. \quad (4)$$

Um die Existenz eines Minimierers dieses Funktionals zeigen zu können müssen wir ein neues Konzept eines Minimierers definieren.

Definition 1 1. Ein Paar von Funktionen

$$(z, \phi) \in L^\infty(B) \times H^1(B)$$

heißt zulässig, falls

(i) eine Folge $(\phi_k)_{k \in \mathbb{R}}$ in $H^1(\Omega)$ existiert, so dass $\phi_k \rightarrow \phi$ bezüglich der L^2 -Norm und

(ii) eine Folge $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{R}}$ von positiven Zahlen mit Grenzwert Null existiert, so dass

$$P_{\varepsilon_k}(\phi_k) \rightarrow z \text{ in } L^1(B) .$$

2. Ein Minimierer von (4) wird als ein zulässiges Paar von Funktionen (z, ϕ) betrachtet, welches

$$\frac{1}{2} \|F(z) - y^\delta\|_Y^2 + \alpha \rho(z, \phi) \tag{5}$$

über alle zulässigen Paare minimiert. Hier ist

$$\rho(z, \phi) := \inf_{k \rightarrow \infty} \left\{ \beta |P_{\varepsilon_k}(\phi_k)| + \frac{1}{2} \|\phi_k - \phi^*\|_{H^1(B)}^2 \right\} ,$$

wobei das Infimum genommen wird bezüglich aller Folgen $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{R}}$, die Item 1(ii) erfüllen, und aller Folgen $(\phi_k)_{k \in \mathbb{R}}$, die Item 1(i) erfüllen.

Ein verallgemeinerter Minimierer von (4) ist ein Minimierer von (5) auf der Menge der zulässigen Paare.

Mittels dieser Definition eines verallgemeinerten Minimierers kann nun eine Konvergenzanalyse durchgeführt werden. Das heißt die Existenz eines verallgemeinerten Minimierers wird bewiesen, sowie die Existenz einer Minimum Norm Lösung $(z^\dagger, \phi^\dagger)$. Eine Minimum Norm Lösung ist ein Paar von zulässigen Funktion für die gilt:

1. $F(z^\dagger) = y$,
2. $\rho(z^\dagger, \phi^\dagger) = \inf \{ \rho(z, \phi) : (z, \phi) \text{ zulässig und } F(z) = y \} .$

Weiters kann die Konvergenz für $\alpha \rightarrow 0$ und $\delta \rightarrow 0$ von verallgemeinerten Minimierern von (4) zu einer Minimum Norm Lösung gezeigt werden.

2.2 Ginzburg-Landau Regularisierung

In diesem Abschnitt studieren wir eine Ginzburg-Landau Regularisierungsmethode um die nicht lineare Operatorgleichung (1) zu lösen unter der Nebenbedingung, dass die Lösung in \mathcal{P} enthalten ist. Bei der Level Set Regularisierungsmethode wurde der Projektionsoperator eingeführt um die Nebenbedingung zu erfüllen. Hier benutzen wir ein geeignetes Regularisierungsfunktional.

Das Ginzburg-Landau Funktional ist definiert durch

$$\mathcal{E}(z) = \int_B \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla z|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(z) \right) dx, \quad W(z) = \frac{1}{4} (|z|^2 - 1)^2 .$$

Offensichtlich ist, dass $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}(z) < \infty$ genau dann, wenn $|z(x)| = 1$ für fast alle $x \in B$. Für $z : B \rightarrow \mathbb{R}$ ist dies bewiesen von Modica und Mortola [AD00].

Diese Eigenschaft nutzen wir nun aus. Wir minimieren das Funktional

$$\frac{1}{2} \|F(z) - y^\delta\|_Y^2 + \alpha \int_B \frac{\varepsilon}{2} |\nabla z|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(z) \, dx. \quad (6)$$

Das Potential W muß jedoch auf die Nebenbedingung angepaßt werden. Die Position der Minima von W sollen an den gewollten Werten des Minimierers von (6) gewählt werden. Eine mögliche Wahl ist

$$W(z) = \frac{1}{4} ((z - 2)(z - 1))^2.$$

Es kann nun für $\alpha > 0$ und $\varepsilon > 0$ die Existenz eines Minimierers von (6) gezeigt werden. Allerdings ist dieser im Allgemeinen nicht in \mathcal{P} enthalten und somit ist die Nebenbedingung nicht erfüllt. Es ist jedoch möglich für den Grenzprozeß von $\varepsilon \rightarrow 0$ zu beweisen, dass weiterhin ein Minimierer existiert und dieser die Nebenbedingung erfüllt.

2.3 Numerische Beispiel

Wir untersuchen das inverse Leitfähigkeitsproblem um die beiden Regularisierungsverfahren zu testen. Das Problem kann wie folgt formuliert werden: Wir wollen Inklusionen mit konstant gleicher Leitfähigkeit in einem Medium mit einer anderen konstanten Leitfähigkeit erkennen. Dafür betrachten wir das Neumann Problem

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\kappa \nabla u) &= 0 & \text{in } B, \\ \kappa \partial_\nu u|_{\partial B} &= g, \\ \int_{\partial B} u|_{\partial B} \, ds &= 0. \end{aligned}$$

Die äussere Normale bzgl. B bezeichnen wir mit ν und $u|_{\partial B}$ ist die Spur von u auf ∂B . Hier beschränken wir uns auf Leitfähigkeiten

$$\kappa = \begin{cases} 2 & \text{in } \Omega \\ 1 & \text{in } B \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Es sei $g \neq 0$. Wir definieren den Operator

$$F : \kappa \mapsto u|_{\partial B}.$$

Das inverse Problem ist nun die Rekonstruktion der Leitfähigkeit κ aus der Kenntnis der Neumann Daten g und den zugehörigen Dirichlet Daten $u|_{\partial B}$. In Abbildung 2 ist ein Ergebnis der beiden Methoden dargestellt.

Die beiden Regularisierungsmethoden führen zu iterativen Lösungsverfahren. Man startet mit einer Anfangsfunktion und ändert diese Funktion in Abhängigkeit der gemessenen Daten ab. Diese Implementierungen sind sehr rechenintensiv. Insbesondere verwenden wir hier ein Landweber Iterationsverfahren ohne a-priori Wissen. Wegen der geringen Konvergenzraten benötigt man mehr als 1000 Iteration und während einer Iteration müssen zwei partielle Differentialgleichungen mit iterativ wechselnden Koeffizienten gelöst werden. In den letzten Jahren wurde eine alternative Methode zu Regularisierungsverfahren entwickelt. Dies ist die sogenannte Faktorisierungsmethode, die im nächsten Abschnitt beschrieben wird.

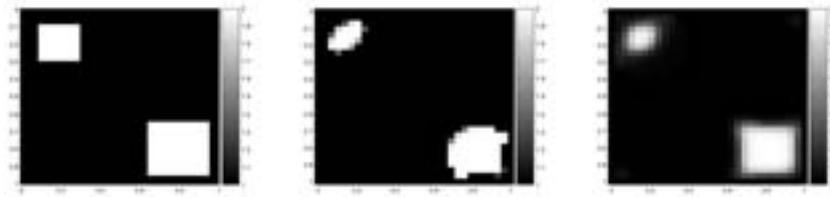


Abbildung 2: Im linken Bild wird die zu rekonstruierende Leitfähigkeit gezeigt. In der Mitte ist das Ergebnis mit der Level Set Methode dargestellt und rechts das Resultat der Ginzburg-Landau Regularisierung.

3 Faktorisierungsmethode

Die Faktorisierungsmethode wurde von Andreas Kirsch eingeführt [Kir98] und seit dem auf mehrere stationäre und harmonische Probleme erweitert, siehe [Bru99, Geb06] und Referenzen darin. Die Hauptschwierigkeit der Faktorisierungsmethode ist, dass die Methode nicht verallgemeinert werden kann. Jede Anwendung benutzt deren spezielle Eigenschaften um zu zeigen, dass das Bild des virtuellen Operators durch die Messungen charakterisiert werden kann. Eine Erweiterung der Faktorisierungsmethode zu anderen Problem ist sehr schwierig. Zum Beispiel ist sie bisher nicht für parabolische Probleme anwendbar.

Die Faktorisierungsmethode ist eine nicht iterative Samplingmethode. Für die numerische Implementierung werden mehrere Messungen benötigt um eine Approximation des Bildes des virtuellen Operators zu erhalten. Dafür muß ein fixes direktes Problem für jede Messung gelöst werden. Im Gegensatz dazu benötigen die vorgestellten Regularisierungsverfahren nur eine Messung.

Im folgenden wird die Idee der Faktorisierungsmethode kurz erläutert anhand der ersten Erweiterung dieser Methode auf ein zeitabhängiges Problem, deren Details in [FGS07] nachgelesen werden können. Wir bezeichnen mit $Z_T = Z \times]0, T[$, wobei $Z \in \{B, Q, \partial\Omega\}$. Das direkte Problem ist das parabolisch-elliptisches Randwertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t(\chi_\Omega(x)u(x, t)) &= \nabla \cdot (\kappa(x) \nabla u(x, t)) \quad \text{in } B_T, \\ \kappa \partial_\nu u|_{\partial B} &= g, \\ u(x, 0) &= 0 \text{ in } B, \end{aligned}$$

wobei $\kappa(x) > 0$. In [FGS07] wird zunächst das direkte Problem bearbeitet und Bedingungen für die Existenz einer eindeutigen Lösung gegeben. Ausserdem ist eine numerische Implementierung mittels Kopplung von Randelementmethoden mit Finite Element Methoden entwickelt worden.

Das Ziel des inverse Problem ist es aus der Kenntnis der Neumann-Dirichlet Abbildung $\Lambda_\kappa : g \mapsto u|_{\partial B}$ die Inklusion Ω zu detektieren. Es wird angenommen, dass $\kappa(x) = 1$ in Q und $\kappa(x) > 1$ innerhalb der Inklusion Ω . Um die Faktorisierungsmethode anzuwenden

betrachten wir noch eine Referenzmessung ohne Inklusion, also $\Lambda_0 : g \mapsto u_0|_{\partial B}$ wobei u_0 Lösung von

$$\begin{aligned}\Delta u_0(x, t) &= 0 \text{ in } B_T \\ \partial_\nu u_0|_{\partial B} &= g \\ u(x, 0) &= 0 \text{ in } B\end{aligned}$$

ist. Weiters sei ψ ein gegebener Fluß auf $\partial\Omega_T$. Dann definieren wir einen virtuellen Operator $L : \psi \mapsto v|_{\partial B}$, wobei v Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned}\Delta v(x, t) &= 0 \text{ in } Q_T \\ \partial_\nu v|_{\partial B} &= 0 \\ \partial_\nu v|_{\partial\Omega} &= \psi \\ v(x, 0) &= 0 \text{ in } B\end{aligned}$$

ist. Bei den bisherigen Anwendungen wird die Detektion der Inklusion Ω erzielt indem man zeigt, dass das Bild von $(\Lambda_\kappa - \Lambda_0)^{1/2}$ gleich dem Bild des Operators L ist. Diese Identität der Bildräume läßt sich für dieses parabolisch-elliptische Problem nicht beweisen. Allerdings sind hinreichend viele Funktionen in beiden Bildräumen enthalten um mit der Auswertung der Paare $(g_i, u_i - u_{0_i})$, $i = 1, \dots, N$, das Bild von L abschätzen zu können.

Als nächstes werfen wir einen Blick auf den Bildraum des Operators L . Die Lösungen v des Randwertproblems sind harmonisch und somit besonders glatte Funktionen. Starke Oszillationen treten nur in der Nähe des Randes von Q auf. Da am äußeren Rand zusätzlich homogene Neumannrandbedingungen gelten, können Unglattheiten nur in der Nähe der Inklusion auftreten. Das heißt je weiter man von Ω entfernt ist, desto glatter werden die Lösung v . Diese Eigenschaft spiegelt sich im Bild von L wieder.

Geeignete Testfunktionen mit einer Singularität in z werden nun benutzt um die Inklusion Ω zu detektieren. Diese Testfunktion erfüllen ähnliche Glattheitseigenschaften wie die Funktionen v außer in der Nähe der Singularität. Dies nutzen wir in unserem Algorithmus. Es läßt sich zeigen, dass die Testfunktionen genau dann im Bildraum von L enthalten sind, wenn die Singularität $z \in \Omega$. In Abbildung 3 ist eine Rekonstruktion der Inklusion mit der Faktorisierungsmethode dargestellt.

4 Zusammenfassung

Es wurden drei Methoden vorgestellt um eine binäre Rekonstruktion von inversen Problemen zu erhalten. Diese Methoden können zum Beispiel zur Segmentierung von medizinischen Bilddaten eingesetzt werden. Insbesondere wurde eine Analysis zu einer Variationsformulierung für Level Set Methoden geliefert. Die Ginzburg-Landau Regularisierungsmethode wurde auf nicht lineare Operatorgleichungen erweitert. Die Erweiterung der Faktorisierungsmethode sollte für die Ausdehnung dieser Methoden auf realistische zeitabhängige Probleme ein Anfang sein.

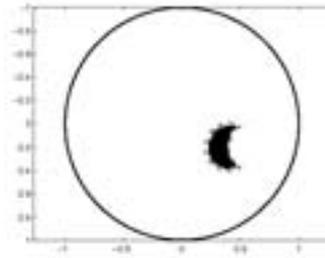


Abbildung 3: Diese Abbildung zeigt die Rekonstruktion einer mondähnlichen Inklusion (gestrichelte Linie). Der schwarze Bereich zeigt das erzielte Resultat.

Literatur

- [AD00] L. Ambrosio und N. Dancer. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 2000.
- [Bru99] M. Bruehl. *Gebietserkennung in der elektrischen Impedanztomographie*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1999.
- [EHN96] H.W. Engl, M. Hanke und A. Neubauer. *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [FG08] F. Frühauf und H. Grossauer. Solving constraint ill-posed problems using Ginzburg-Landau regularization functionals. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 16:35–50, 2008.
- [FGS07] Florian Frühauf, Bastian Gebauer und Otmar Scherzer. Detecting Interfaces in a Parabolic-Elliptic Problem from Surface Measurements. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(2):810–836, 2007.
- [FLS05] F. Frühauf, A. Leitao und O. Scherzer. Analysis of regularization methods for the solution of ill-posed problems involving discontinuous operators. *SIAM Journal Numer. Anal.*, 43:767–786, 2005.
- [Geb06] B. Gebauer. *Gebietserkennung mit der Faktorisierungsmethode*. Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2006.
- [Kir96] A. Kirsch. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [Kir98] A. Kirsch. Characterization of the shape of a scattering obstacle using the spectral data of the far field operator. *Inverse Problems*, 14:1489–1512, 1998.



Florian Frühauf wurde am 19. Oktober 1975 in Starnberg geboren. Er besuchte den Kindergarten in Perchting, die Volksschule in Söcking und schließlich das Gymnasium Starnberg. Nach 13 Monaten Zivildienst im Kriegsblindenkursanatorium in Söcking begann er das Mathematikstudium an der TU München, welches er 2002 erfolgreich abschloß. Während des Studiums arbeitete er bei der GSF an der Auswertung von biologischen und medizinischen Bilddaten. Anschließend ging er zur Gruppe Infmath von Prof. Otmar Scherzer am Institut für Informatik in Innsbruck. Dort promovierte er im Jahr 2007 und bearbeitet seitdem Projekte

im Bereich der Bildbearbeitung von Ultraschall- und Radardaten.