

# Eine Multivariate Komplexitätsanalyse von Wahlproblemen

Nadja Betzler  
Friedrich-Schiller-Universität Jena  
Fakultät für Mathematik und Informatik  
nadjabetzler@daad-alumni.de

**Abstract:** Die Dissertation “A Multivariate Complexity Analysis of Voting Problems” befasst sich mit NP-harten Problemen im Kontext von Wahlen. Das Ziel ist mittels Methoden der parametrisierten Algorithmik ein besseres Verständnis der kombinatorischen Schwierigkeit dieser Probleme zu erlangen und dabei relevante Szenarien zu identifizieren, in denen diese “tractable”, das heißt effizient lösbar, sind. Die betrachteten Probleme umfassen die Berechnung eines Gewinners sowie die Erstellung einer Konsensrangliste. Desweiteren wird die Frage nach einem Möglichen Gewinner im Falle von unvollständiger Information sowie die Beeinflussung eines Wahlausgangs durch Löschen oder Hinzufügen von Kandidaten untersucht. Der Schwerpunkt liegt auf einer theoretischen Analyse. Für das sogenannte RANK AGGREGATION-Problem werden einige der entwickelten Algorithmen auch experimentell evaluiert.

## 1 Einleitung

In vielen Bereichen des täglichen Lebens werden wir mit Wahlsituationen konfrontiert. Neben politischen Wahlen und der Wahl von Vorständen kann man auch die Einigung in der Familie oder im Freundeskreis auf ein gemeinsames Urlaubsziel oder Restaurant als Wahlprozess auffassen. Desweiteren erfolgt die Besetzung von Arbeitsstellen sowie von Ämtern oder die Verleihung von Preisen oft anhand von Auswahlverfahren, in denen typischerweise ein kleines Gremium Gewinner aus einer oft großen Bewerbermenge auswählt.

Die Arbeit beschäftigt sich mit einer multivariaten Komplexitätsanalyse kombinatorischer Probleme im Wahlkontext. Wahlen beschreiben hierbei den Prozess einer gemeinsamen Entscheidungsfindung mehrerer Parteien, wobei eine Wahl formal betrachtet eine Multimenge von Stimmabgaben über einer Menge von *Kandidaten* (oder Alternativen) ist. In dem üblichen Szenario liegen die Stimmabgaben als *Präferenzlisten* vor, das heißt als lineare Ordnung der Kandidaten. Neben den oben erwähnten Anwendungen hat die Informatik selbst vielfältige neue Wahlsituationen geschaffen. Ein typisches Problem betrifft das Erstellen einer Konsensrangliste aus mehreren „Rankings“ unterschiedlicher Suchmaschinen. Desweiteren treten informatikrelevante „Wahlprobleme“ in der Bioinformatik oder im Kontext von Datenbanken und Multiagentensystemen auf.

Die Untersuchung von Wahlproblemen mittels Methoden der Mathematik und Informatik hat als Teil des Forschungsgebiets „Computational Social Choice“ innerhalb der letzten Jahre stark an Bedeutung gewonnen [FHH10, FP10]. Die untersuchten kombinatorischen Probleme reichen hierbei von der Berechnung eines Gewinners anhand bestimmter Wahl-

verfahren über strategisches Wählen bis hin zur Beeinflussung des Wahlausgangs durch externe Agenten. Hinzu kommen verschiedene Szenarien basierend auf unterschiedlicher Verfügbarkeit von Information. Viele dieser Probleme sind NP-hart, das heißt im Allgemeinen wohl nicht effizient lösbar. Wir untersuchen den Ansatz einer parametrisierten Komplexitätsanalyse als möglichen Ausweg. Diese basiert auf einer zweidimensionalen Sichtweise. Zusätzlich zu der Eingabegröße betrachtet man einen Parameter, beispielsweise die Lösungsgröße oder die Anzahl der Kandidaten. Ein Problem ist nun *fixed-parameter tractable (FPT)* wenn es einen Algorithmus gibt, dessen nichtpolynomieller Anteil der Laufzeit nur von einer Funktion des Parameters abhängt. Wenn der betrachtete Parameter klein gemessen an der Eingabegröße ist, kann dies zu effizienten Algorithmen führen. Im Wahlkontext gibt es beispielsweise Situationen mit vielen Wählern aber nur wenigen Kandidaten, wie im Falle von politischen Wahlen. Hier kann die Beschränkung der inhärenten kombinatorischen Explosion von NP-harten Problemen auf eine Funktion, die nur von der Anzahl der Kandidaten abhängt, eine schnelle Berechnung einer Lösung erlauben. Eine multivariate Analyse erweitert das Konzept der parametrisierten Komplexität in dem Sinne, dass mehrere Parameter gemeinsam betrachtet werden [Nie10].

Obwohl die betrachteten Probleme meist eine Vielzahl von Parametrisierungen zulassen, die sinnvolle Szenarien abdecken, gibt es bisher nur sehr wenige Studien in diese Richtung. Das Ziel dieser Arbeit ist daher, die Untersuchung der multivariaten und insbesondere der parametrisierten Komplexität für wichtige Wahlprobleme voranzutreiben. Wir betrachten drei Arten von Problemen, die zu einer Einteilung der Arbeit in drei Teile führen:

- Die Berechnung eines Gewinners sowie die damit verbundene Fragestellung der Erstellung einer sinnvollen Konsensliste aus mehreren Eingaberankings.
- Die Berechnung eines möglichen Gewinners ausgehend von unvollständiger Information, d.h. von Präferenzlisten in Form von partiellen statt linearen Ordnungen.
- Die Beeinflussung eines Wahlausgangs durch einen externen Agenten mittels Hinzufügens oder Löschens von Kandidaten.

Bevor die einzelnen Ergebnisse der Arbeit vorgestellt werden, geben wir noch einen kurzen Überblick über die verwendete Methodik. Um *FPT-Algorithmen* zu erhalten, das heißt Algorithmen mit einer Laufzeit von  $f(k) \cdot \text{poly}(n)$  für eine berechenbare Funktion  $f$ , eine Eingabe der Größe  $n$  und Parameter  $k$ , werden verschiedene algorithmische Techniken eingesetzt. Diese umfassen dynamisches Programmieren, Suchbäume sowie in Polynomzeit ausführbare Datenreduktionsregeln, die zu einer beweisbar nur vom Parameter abhängigen oberen Schranke für die Größe einer reduzierten Instanz führen. Desweiteren werden Netzwerkfluss- und „Matching“-Algorithmen sowie Integer Linear Program (ILP)-Formulierungen eingesetzt. Ein wesentlicher Bestandteil der Arbeit ist auch das Zeigen der Nichtexistenz von FPT-Algorithmen für bestimmte Szenarien. Hierbei werden neben der „klassischen“ polynomiellen Many-One Reduktion zum Beweisen von NP-Härteresultaten auch sogenannte *parametrisierte Reduktionen* eingesetzt. Mit diesen wird Härte und Vollständigkeit bezüglich der parametrisierten Komplexitätsklassen  $W[1]$  und  $W[2]$  gezeigt, wobei  $W[1] \subseteq W[2]$  gilt und unter „vernünftigen“ komplexitätstheoretischen Annahmen ein  $W[1]$ -hartes Problem nicht fixed-parameter tractable sein kann [DF99, FG06, Nie06].

## 2 Berechnung eines Gewinners

Für einige Wahlsysteme, die ansonsten über wünschenswerte Eigenschaften verfügen, ist bereits die Berechnung eines Gewinners NP-hart. Im ersten Teil der Arbeit untersuchen wir die parametrisierte Komplexität drei solcher prominenter Wahlsysteme, die nach Dodgson, Kemeny und Young benannt wurden. Unser Hauptaugenmerk liegt hierbei auf Kemeny's Wahlsystem und dem zugehörigen RANK AGGREGATION-Problem, das auch den Nutzen der Betrachtung verschiedener struktureller Parametrisierungen illustrieren soll.

### 2.1 Dodgson und Young

Ein *Condorcet-Gewinner* ist ein Kandidat, der alle anderen im direkten paarweisen Vergleich schlägt, das heißt in mehr als der Hälfte der Präferenzlisten besser platziert ist. Anhand von folgendem Beispiel mit drei Präferenzlisten über der Kandidatenmenge  $\{a, b, c\}$  ist leicht zu sehen, dass es nicht immer einen Condorcet-Gewinner geben muss:

$$\text{Wähler 1: } a > b > c \quad \text{Wähler 2: } b > c > a \quad \text{Wähler 3: } c > a > b$$

Für die paarweisen Vergleiche gilt: Kandidat  $a$  schlägt  $b$ ,  $b$  schlägt  $c$  und  $c$  schlägt  $a$ . Also gewinnt kein Kandidat alle paarweisen Vergleiche. In den von Dodgson und Young eingeführten Wahlsystemen beschreibt die Punktzahl eines Kandidaten die Anzahl der „Operationen“, die nötig sind, um diesen zu einem Condorcet-Gewinner zu machen. Die Operation für Dodgson ist das Vertauschen benachbarter Kandidaten in einer Stimmabgabe und bei Young das Löschen von Stimmabgaben. Unser Hauptergebnis ist, dass die Berechnung der Punktzahl eines Kandidaten bezüglich des Parameters Anzahl der Operationen für Dodgson fixed-parameter tractable ist, wohingegen das analoge Problem für Young W[2]-vollständig ist. Für Dodgson's Wahlsystem beantworten wir damit eine offene Frage von Christian et al. [CFRS07]. Wir geben dazu einen dynamischen Programmieralgorithmus an, der auf sogenannten „Defizitvektoren“ beruht, einer Struktur, die sich auch für andere Wahlprobleme als nützlich erwiesen hat. Die W[2]-Härte für Young konnte mittels einer Reduktion von einer Variante von DOMINATING SET gezeigt werden.

### 2.2 Rank Aggregation

Eine prominente Anwendung des im Folgenden definierten RANK AGGREGATION-Problems ergibt sich im Kontext von Metasuchmaschinen, wobei Eingabelisten von verschiedenen Suchmaschinen zusammengefasst werden müssen. Sei nun die Kendall-Tau-Distanz (*KT-Distanz*) zwischen zwei Präferenzlisten die Anzahl der Inversionen, das heißt die Anzahl der Kandidatenpaare mit unterschiedlicher relativer Reihenfolge. Damit kann das RANK AGGREGATION-Problem folgendermaßen definiert werden.

Tabelle 1: Überblick über Parametrisierungen und Resultate der Arbeit. Die Ergebnisspalte enthält entweder die zugehörige Laufzeit in der  $O^*$ -Notation (ohne polynomielle Faktoren) oder eine obere Schranke für die Kandidatenanzahl nach Anwendung der Datenreduktionsregeln.

Parameter	Ergebnis	Methode
Kandidatenanzahl $m$	$O^*(2^m)$	Dynamisches Programmieren
Kemeny score $k$	$O^*(1.53^k)$	Suchbaum
Max. Positionsbereich $r$	$O^*(32^r)$	Dynamisches Programmieren
Durchs. Positionsbereich $r_a$	NP-c für $r_a \geq 2$	Reduktion v. RANK AGGREGATION
Durchs. KT-Distanz $d_a$	$O^*(16^{d_a})$	Dynamisches Programmieren
	$11d_a$ Kandidaten	Datenreduktion

*Gegeben:* Eine Multimenge von Präferenzlisten über einer Kandidatenmenge.

*Gesucht:* Eine Konsensliste, die die Summe der KT-Distanzen der Konsensliste zu den einzelnen Eingabelisten minimiert.

**Parametrisierungen.** RANK AGGREGATION bietet mehrere Parametrisierungsmöglichkeiten, die in der Arbeit systematisch untersucht werden. Wir beginnen mit der Betrachtung von einigen „Standardparametern“, gefolgt von problemspezifischen Parametern, auf deren Betrachtung der Schwerpunkt der Untersuchung liegt. Tabelle 1 bietet einen Überblick über die Parametrisierungen und erzielten Ergebnisse.

Inhärente Parameter von Wahlproblemen sind die Anzahl der Wähler (Präferenzlisten) und der Kandidaten. RANK AGGREGATION ist bereits NP-hart wenn es nur vier Eingabelisten gibt [DKNS01] und somit auch nicht fixed-parameter tractable bezüglich der Wähleranzahl außer wenn  $P=NP$ . Im Gegensatz dazu stellt das Lösen einer Instanz mit wenigen Kandidaten kein Problem dar: Für jede Kandidatenreihenfolge lässt sich die Summe der Abstände einfach berechnen. Da man für eine „kleine“ Kandidatenanzahl  $m$  einfach alle  $m!$  Kandidatenreihenfolgen durchtesten kann, erhält man so einen trivialen FPT-Algorithmus. In der Arbeit wurde nun ein dynamischer Programmieralgorithmus entwickelt, der den exponentiellen Laufzeitanteil auf  $2^m$  verbessert.

Der wohl am häufigsten betrachtete Parameter in der Parametrisierten Algorithmik ist die Lösungsgröße, in unserem Fall also der *Kemeny-Score*, der die Summe der Abstände einer optimalen Konsensliste (eines *Kemeny-Rankings*) zu den Eingabelisten beschreibt. Mittels eines Suchbaumalgorithmus haben wir fixed-parameter tractability bezüglich diesem Parameter gezeigt. Das Ergebnis ist allerdings eher von theoretischem Interesse, da der Kemeny-Score für nichttriviale Instanzen meist sehr große Werte annimmt.

Im Folgenden diskutieren wir Parameter, die strukturelle Eigenschaften messen. Ausgangspunkt dieser Untersuchung ist, dass es in manchen Fällen plausibel erscheint, dass sich die Eingabelisten „ähnlich“ sind [CS05]. Im obigen Beispiel der Suchmaschinen kann man annehmen, dass es eine „beste“ Konsensliste gibt, aber die einzelnen Suchmaschinen diese nur verrauscht wiedergeben. Wir haben zwei komplementäre Arten von Parametri-

Tabelle 2: Resultate der Datenreduktionsregeln für einige Suchmaschinen-Instanzen, in denen die Kandidaten den Webseiten entsprechen. Die Laufzeiten sind in Sekunden angegeben. Die letzte Spalte wird anhand des Begriffs „architecture“ erläutert: Die Datenreduktionsregeln können die besten 36 Kandidaten sowie deren interne Reihenfolge in einem Kemeny-Ranking bestimmen. Dann folgt eine Gruppe von 12 Kandidaten, die die Positionen von 37 bis 48 einnehmen und deren interne Reihenfolge offen ist. Es folgen wiederum 30 Kandidaten mit bekannter Reihenfolge, usw.

Suchwort	# Kand.	Zeit	Struktur	reduzierte Instanz
affirmative action	127	0.21	$1^{27}$	$> 41 >$ $1^{59}$
alcoholism	115	0.10	$1^{115}$	
architecture	122	0.16	$1^{36}$	$> 12 > 1^{30} > 17 >$ $1^{27}$
blues	112	0.10	$1^{74}$	$> 9 >$ $1^{29}$
cheese	142	0.20	$1^{94}$	$> 6 >$ $1^{42}$
classical guitar	115	0.19	$1^6$	$> 7 > 1^{50} > 35 >$ $1^{17}$
Death+Valley	110	0.11	$1^{15}$	$> 7 > 1^{30} > 8 >$ $1^{50}$
field hockey	102	0.17	$1^{37}$	$> 26 > 1^{20} > 4 >$ $1^{15}$
gardening	106	0.10	$1^{54}$	$> 20 > 1 > 1 > 9 > 1^8 > 4 >$ $1^9$
HIV	115	0.13	$1^{62}$	$> 5 > 1^7 > 20 >$ $1^{21}$
lyme disease	153	3.08	$1^{25}$	$> 97 >$ $1^{31}$

sierungen betrachtet, um die Ähnlichkeit der Eingabelisten zu messen:

1. Den maximalen sowie den durchschnittlichen Positionsbereich in dem ein Kandidat auftritt.
2. Die durchschnittliche KT-Distanz zwischen allen Paaren von Eingabelisten.

Die Ergebnisse sind wie folgt. Wogegen schon ein konstanter durchschnittlicher Positionsbereich zu NP-Härte führt, lässt sich für den maximalen Positionsbereich fixed-parameter tractability mittels dynamischen Programmierens zeigen. Für den Parameter durchschnittliche KT-Distanz  $d_a$  zeigt die Arbeit fixed-parameter tractability mittels einer strukturellen Beobachtung und eines darauffbauenden dynamischen Programmieralgorithmus. Die zugehörige Laufzeit von  $O^*(16^{d_a})$  wurde inzwischen auf  $O^*(2^{\sqrt{d_a}})$  verbessert [KS10]. Im folgenden Abschnitt möchten wir nun kurz auf einen komplementären ebenfalls in der Arbeit betrachteten Ansatz eingehen. Dieser basiert auf Datenreduktionsregeln und führt ebenfalls beweisbar zur fixed-parameter tractability bezüglich  $d_a$ . Obwohl dieser Ansatz nicht zu einer Verbesserung der Worst-case Laufzeit führt, hat er folgenden „Mehrwert“: Er beruht auf einfachen in Polynomzeit ausführbaren Datenreduktionsregeln, deren Nutzen experimentell belegt werden konnte.

Zur Analyse der Datenreduktionsregeln benutzen wir die neu eingeführte Methode des *Partiellen Problemkerns*, die beweisbar zu fixed-parameter tractability führt. Die Analyse basiert auf der Einführung eines neuen Parameters, der die Anzahl der „Konfliktkandidatenpaare“ bezüglich verschiedener Mehrheiten misst, z.B. bilden die Kandidaten  $a$  und  $b$  ein Konfliktpaar bezüglich der 3/4-Mehrheit, wenn weder 3/4 der Wähler  $a$  gegenüber  $b$  noch 3/4 der Wähler  $b$  gegenüber  $a$  bevorzugen. Die experimentelle Evaluierung der

Datenreduktionsregeln sowie einiger anderer Algorithmen erfolgt anhand von Daten aus Sportwettkämpfen und Suchmaschinen. Tabelle 2 zeigt die Ergebnisse der Datenreduktionsregeln für einen mittels der vier Suchmaschinen Google, Lycos, MSN Live Search, und Yahoo! erzeugten Datensatz. Auch wenn die Instanzen nicht alle vollständig gelöst werden konnten, so konnten zumindest die besten Kandidaten eines Kemeny-Rankings identifiziert und geordnet werden. Die Instanzen sind ohne vorherige Datenreduktion mit dem „state-of-the-art“-ILP Algorithmus gar nicht oder nur in längerer Laufzeit lösbar.

### 3 Berechnung eines Möglichen Gewinners

In dem Standardmodell einer Wahl geben die Wähler ihre Stimmabgaben als lineare Ordnung über alle Kandidaten ab. In vielen Situationen erscheint dies unrealistisch oder man möchte schon etwas über den *möglichen* Ausgang einer Wahl erfahren, bevor die gesamte Information vorliegt. Dies führt direkt zu dem POSSIBLE WINNER Problem [XC08]:

*Gegeben:* Eine Multimenge partieller Ordnungen über eine Kandidatenmenge und ein favorisierter Kandidat.

*Frage:* Kann jede partielle Ordnung zu einer linearen Ordnung erweitert werden, so dass in der resultierenden Wahl der favorisierte Kandidat gewinnt?

Wir betrachteten das POSSIBLE WINNER Problem für eine Menge von Wahlsystemen, die als (*positionsbasierte*) *Punkteregeln* bezeichnet werden. Jeder Kandidat bekommt Punkte abhängig von seiner Position in einer als lineare Ordnung vorliegenden Stimmabgabe und ein Kandidat mit höchster Gesamtpunktzahl gewinnt. Prominente Beispiele sind wie folgt.

- (einfaches) *Mehrheitswahlrecht*: ein Kandidat bekommt einen Punkt für jede Stimmabgabe, in der er vorne steht.
- *k-Approval*: die ersten  $k$  Kandidaten einer Stimmabgabe bekommen einen Punkt.
- *Borda*<sup>1</sup>: für  $m$  Kandidaten, bekommt der erste Kandidat einer Liste  $m$  Punkte, der zweite  $m - 1$  Punkte usw.
- *Formel 1*: in jedem Rennen bekommt der erste Fahrer 25 Punkte, der zweite Fahrer 18 Punkte usw.

Eine bestimmte Regel kann hierbei durch einen *Punktevektor* beschrieben werden, der für jede Position die zugehörige Punktzahl angibt, z.B.  $(25, 18, 15, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 1, 0, \dots, 0)$  im Falle des Formel 1-Beispiels.

**Dichotomie.** Zuerst betrachten wir die Schwierigkeit des POSSIBLE WINNER Problems abhängig von der betrachteten Punkteregel. Obwohl für einige dieser Regeln inklusive der Borda-Regel schon bekannt war, das POSSIBLE WINNER NP-vollständig ist [XC08], gab es noch viele offene Fälle. Auch unter Ausnutzung einiger Ergebnisse aus der Literatur [XC08, BR10] geben wir eine komplette Dichotomie an:

**Theorem.** POSSIBLE WINNER kann für einfache Mehrheitswahlen, beschrieben durch  $(1, 0, \dots, 0)$ , und Veto, beschrieben durch  $(1, \dots, 1, 0)$ , in Polynomzeit gelöst werden und ist NP-vollständig für alle anderen Punkteregeln.

<sup>1</sup>Benannt nach Jean-Charles de Borda (1733 – 1799)

Insbesondere zeigt die Arbeit mittels einer aufwändigen Many-One Reduktion von einer Variante des CLIQUE-Problems, dass POSSIBLE WINNER bereits für 2-Approval, d.h.  $(1, 1, 0, \dots, 0)$ , NP-vollständig ist, wohingegen es für einfache Mehrheitswahlen, d.h.  $(1, 0, \dots, 0)$ , mittels eines netzwerkflussbasierten Algorithmus in Polynomzeit lösbar ist.

**Parametrisierte Komplexität.** Die aus der Dichotomie folgende NP-Härte für fast alle Punktregeln motiviert eine weitergehende Untersuchung der parametrisierten Komplexität. Neben der Betrachtung von Parametern, die den Grad der Unvollständigkeit einer Eingabeinstanz messen, zeigen wir, dass POSSIBLE WINNER fixed-parameter tractable bezüglich der Anzahl der Kandidaten ist. Außerdem zeigen wir für die Borda-Regel sowie für  $k$ -Approval, dass POSSIBLE WINNER schon für eine konstante Anzahl von Wählern NP-vollständig ist.

Im Folgenden beschreiben wir nun unsere Resultate für POSSIBLE WINNER unter  $k$ -Approval bezüglich kombinierter Parameter. Aus den oben erwähnten NP-Härteresultaten folgt, dass dieses Problem sowohl für mindestens zwei Wähler NP-hart ist als auch für eine konstante Anzahl von mindestens zwei Kandidaten, die einen/keinen Punkt pro Stimmabgabe bekommen. Da somit für die jeweils einzelnen Parameter keine fixed-parameter tractability zu erwarten ist, betrachten wir die beiden folgenden kombinierten Parameter.

- Anzahl  $t$  der Wähler kombiniert mit  $k$ .
- Anzahl  $t$  der Wähler kombiniert mit  $k' := \text{Anzahl Kandidaten} - k$ .

Obwohl dies auf den ersten Blick sehr restriktiv erscheinen mag, werden immer noch sinnvolle Szenarien abgedeckt; beispielsweise ein kleines Gremium bestehend aus  $t$  Wählern, das aus einer großen Anzahl von Bewerbern  $k$  Gewinner auswählt. Für beide kombinierten Parameter konnten wir polynomiell ausführbare Datenreduktionsregeln angeben, die zu einem sogenannten „Problemkern“ führen, aus dem fixed-parameter tractability folgt. Allerdings unterscheidet sich die jeweilige Größe des Problemkerns, das heißt in unserem Fall die Anzahl der Kandidaten, die nach der erschöpfenden Anwendung der entwickelten Datenreduktionsregeln höchstens übrig bleiben können, erheblich. Für den Parameter  $(t, k')$  lässt sich ein polynomieller Problemkern mit  $O(tk'^2)$  Kandidaten beweisen, wohingegen wir für den Parameter  $(t, k)$  einen Beweis der Nichtexistenz eines Problemkerns polynomieller Größe erbringen (unter einigen Komplexitätstheoretischen Annahmen [BDFH09]).

## 4 Wahlkontrolle

Ein nicht zu vernachlässigender Aspekt bei der Durchführung von Wahlen betrifft die Beeinflussung des Wahlausgangs durch einen Außenstehenden zu dessen Gunsten. Wir betrachten das in der Literatur als *Wahlkontrolle* bezeichnete Szenario in dem ein externer Agent durch Löschen oder Hinzufügen von Kandidaten seinen Favoriten zum Gewinner machen möchte. Unser Hauptaugenmerk liegt hierbei auf folgendem, für  $0 \leq \alpha \leq 1$  definiertem Wahlsystem, das nach A. H. Copeland benannt wurde.

Tabelle 3: Parametrisierte Komplexität von MAX-OUTDEGREE DELETION (MOD) und MIN-INDEGREE DELETION (MID) für die jeweils in der linken Spalte angegebene Klasse von gerichteten Graphen.

Parameter Problem	# gelöschte Knoten $k$		Maximalgrad $d$		$(k, d)$	
	MOD	MID	MOD	MID	MOD	MID
allgemein	W[2]-c	W[2]-c	NP-c für $d \geq 3$	FPT	FPT	FPT
azyklisch	W[2]-c	P	NP-c für $d \geq 3$	P	FPT	P
Turniergraph	W[2]-c	W[2]-c	-	-	-	-

**Definition** (Copeland $^\alpha$ ). *Ein Kandidat schlägt einen anderen Kandidaten im direkten Vergleich, wenn er von mehr als der Hälfte der Wähler bevorzugt wird, das heißt, eine bessere Position in der Präferenzliste einnimmt. Ein Kandidat erhält einen Punkt für jeden gewonnen direkten Vergleich und  $\alpha$  Punkte für jeden unentschiedenen Vergleich. Ein Kandidat mit höchster Gesamtpunktzahl gewinnt.*

Wie man leicht sieht, kann man Copeland $^\alpha$  auch über entsprechende Probleme auf gerichteten Graphen charakterisieren. Jeder Kandidat entspricht dabei einem Knoten und es gibt eine Kante von  $A$  nach  $B$ , wenn Kandidat  $A$  Kandidat  $B$  schlägt. Dies kann man sich am Beispiel von Sportwettkämpfen verdeutlichen, wobei jede Mannschaft einem Knoten entspricht. Beispielsweise wird in der Fußballbundesliga ein Spielausgang mit 0, 1 oder 3 Punkten bewertet, was sich als Copeland $^{1/3}$  interpretieren lässt. Das Problem der Wahlkontrolle entspricht dann dem „Löschen“ oder „Hinzufügen“ von Mannschaften.

Wir haben nun die parametrisierte Komplexität für die verwandten Graphprobleme auf verschiedenen Graphklassen untersucht. In einer Copeland $^0$ -Wahl gewinnt ein Kandidat, der am meisten direkte Vergleiche gewinnt, da bei Gleichstand Null Punkte vergeben werden. Somit entspricht das wie folgt definierte MAX-OUTDEGREE DELETION-Problem (MOD) der Wahlkontrolle durch Löschen von Kandidaten unter Copeland $^0$ :

*Gegeben:* Ein gerichteter Graph, ein ausgezeichneter Knoten sowie ein „Budget“ einer maximal zu löschenden Knotenanzahl  $k$ .

*Frage:* Kann der ausgezeichnete Knoten durch Löschen von  $k$  Knoten zu einem Knoten mit maximalem Ausgangsgrad gemacht werden?

Das MIN-INDEGREE DELETION-Problem (MID) ist analog für Copeland $^1$  definiert. Das Ziel hierbei ist den ausgezeichneten Knoten durch möglichst wenige Löschungen zu einem Knoten mit kleinstmöglichem Eingangsgrad zu machen. Unsere Ergebnisse sind in Tabelle 3 dargestellt. Da die Probleme sich nur in der Bewertung eines Gleichstandes zwischen zwei Kandidaten (Knoten) unterscheiden, impliziert hierbei die W[2]-Vollständigkeit für einen Turniergraphen (in dem es eine gerichtete Kante zwischen jedem Knotenpaar gibt), dass Wahlkontrolle durch Kandidatenlöschung für jedes  $\alpha$  auch schon für eine begrenzte Anzahl von Löschungen schwer zu lösen ist. Auf anderen Graphklassen ergeben sich jedoch beweisbare Komplexitätsunterschiede. Beispielsweise ist MOD auf azyklischen Graphen immer noch W[2]-vollständig, wogegen MID in Polynomzeit lösbar ist.



Um die Härteresultate für die Graphprobleme auf die Wahlprobleme zu übertragen, müssen die gerichteten Graphen wieder in eine Wahl überführt werden, d.h. man sucht eine Multimenge von Präferenzlisten, so dass ein Kandidat  $A$  in mehr als der Hälfte der Listen vor  $B$  steht, wenn es eine gerichtete Kante von  $A$  nach  $B$  gibt. Dies ist immer möglich, wenn man eine große Anzahl von Wählern zu Verfügung hat. Faliszewski et al. [FHHR08] stellten nun die Frage, ob dies auch für wenige Wähler möglich ist. In anderen Worten: Kann überhaupt ein schwer zu entscheidender Graph durch eine kleine Anzahl von Präferenzlisten „erzeugt“ werden? In der Arbeit beantworten wir diese Frage für die beiden Spezialfälle  $\alpha = 0$  und  $\alpha = 1$ . Genauer gesagt zeigen wir NP-Härte für Wahlkontrolle durch Löschen oder Hinzufügen von Kandidaten im Falle einer konstanten Anzahl von Präferenzlisten. Desweiteren untersuchen wir die parametrisierte Komplexität von Kontrolle für das wohl einfachste Wahlsystem, dem Mehrheitwahlrecht in dem für jeden Wähler der beste Kandidat einen Punkt bekommt. Hier zeigen wir, dass Wahlkontrolle  $W[1]$ -hart bezüglich der Anzahl zu löschender/hinzuzufügender Kandidaten ist.

## 5 Fazit

Obwohl die Untersuchung der Berechnungskomplexität von Wahlproblemen seit Anfang der 1990ziger Jahre stark an Bedeutung gewonnen hat und die zugrundeliegenden kombinatorischen Probleme aufgrund ihrer Struktur eine multivariate Komplexitätsanalyse geradezu herausfordern, gab es vor Beginn der Arbeit an meiner Dissertation nur sehr wenige Publikationen: In dem Übersichtsartikel [LR08] werden fünf Publikationen zitiert, die sich parametrisierter Algorithmik für Wahlsystem beschäftigen und drei davon sind wiederum Teil dieser Arbeit. In der Dissertation wurde somit im Sinne einer „Pionierarbeit“ erstmals eine systematische Untersuchung der parametrisierten Komplexität grundlegender Wahlprobleme angestrebt. Aufgrund der enormen Anzahl praxisrelevanter Wahlsituationen und dabei auftretender natürlicher Parameter kann die Arbeit nur einen ersten Schritt bedeuten und es bleiben viele spannende offene Fragen für zukünftige Forschungsarbeiten bestehen.

## Literatur

- [BDFH09] H. L. Bodlaender, R. G. Downey, M. R. Fellows und D. Hermelin. On problems without polynomial kernels. *Journal of Computer and System Sciences*, 75(8):423–434, 2009.
- [BR10] D. Baumeister und J. Rothe. Taking the final step to a full dichotomy of the Possible Winner problem in pure scoring rules. In *Proceedings of the 19th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI)*, Seiten 1019–1020 (short paper), 2010.
- [CFRS07] R. Christian, M. R. Fellows, F. A. Rosamond und A. Slinko. On complexity of lobbying in multiple referenda. *Review of Economic Design*, 11(3):217–224, 2007.
- [CS05] Vincent Conitzer und Tuomas Sandholm. Common Voting Rules as maximum likelihood estimators. In *Proceedings of the 21st Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI)*, Seiten 145–152. AUAI Press, 2005.

- [DF99] R. G. Downey und M. R. Fellows. *Parameterized Complexity*. Springer, 1999.
- [DKNS01] C. Dwork, R. Kumar, M. Naor und D. Sivakumar. Rank aggregation methods for the Web. In *Proceedings of the 10th International World Wide Web Conference (WWW)*, Seiten 613–622, 2001.
- [FG06] J. Flum und M. Grohe. *Parameterized Complexity Theory*. Springer, 2006.
- [FHH10] P. Faliszewski, E. Hemaspaandra und L. A. Hemaspaandra. Using complexity to protect elections. *Communications of the ACM*, 53(1):74–82, 2010.
- [FHHR08] P. Faliszewski, E. Hemaspaandra, L. A. Hemaspaandra und J. Rothe. Copeland voting fully resists constructive control. In *Proceedings of the 4th International Conference on Algorithmic Aspects in Information and Management (AAIM)*, Jgg. 5034 of *LNCS*, Seiten 165–176. Springer, 2008.
- [FP10] P. Faliszewski und A. Procaccia. AI’s war on manipulation: are we winning? *AI Magazine*, 31(4):53–64, 2010.
- [KS10] M. Karpinski und W. Schudy. Faster algorithms for Feedback Arc Set Tournament, Kemeny Rank Aggregation and Betweenness Tournament. In *Proceedings of the 21st International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC)*, Jgg. 6506 of *LNCS*, Seiten 3–14. Springer, 2010.
- [LR08] C. Lindner und J. Rothe. Fixed-Parameter Tractability and Parameterized Complexity Applied to Problems From Computational Social Choice. Supplement in the *Mathematical Programming Glossary*, A. Holder, editor. INFORMS Computing Society, 2008.
- [Nie06] R. Niedermeier. *Invitation to Fixed-Parameter Algorithms*. Oxford University Press, 2006.
- [Nie10] R. Niedermeier. Reflections on multivariate algorithmics and problem parameterization. In *Proceedings of the 27th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS’10)*, Jgg. 5 of *LIPICs*, Seiten 17–32, 2010.
- [XC08] L. Xia und V. Conitzer. Determining Possible and Necessary Winners under Common Voting Rules Given Partial Orders. In *Proceedings of the 23rd AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, Seiten 196–201. AAAI Press, 2008. Full version accepted with minor revisions to *Journal of Artificial Intelligence Research*.



**Nadja Betzler** wurde am 8. August 1979 in Stuttgart geboren. Von Oktober 2000 bis November 2006 studierte sie Bioinformatik an der Eberhard-Karls-Universität Tübingen. Ihre Diplomarbeit zum Thema „Steiner Trees in the Analysis of Biological Networks“ basiert auf einem DAAD-geförderten Forschungsaufenthalt am McGill Centre for Bioinformatics, Montreal, Kanada in der Gruppe von Prof. M. Hallett. Von November 2006 bis Dezember 2010 arbeitete sie als wissenschaftliche Mitarbeiterin in der Gruppe von Prof. R. Niedermeier an der Friedrich-Schiller-Universität Jena und schloss dabei im November 2010 ihre Dissertation ab. Nach einmonatigen Postdoc-Aufenthalt an

der TU Berlin im Januar 2011 folgt ein viermonatiger vom DAAD geförderter Forschungsaufenthalt bei Prof. A. Slinko an der University of Auckland, Neuseeland.