Computeralgebra in der Schule – Stand der Dinge!?

Gilbert Greefrath, Jan Hendrik Müller (Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Rivius-Gymnasium Attendorn)

`greefrath@uni-muenster.de`
`jan.mueller@math.uni-dortmund.de`

Im Spätherbst 2010 wurden die Autoren als Fachexperten für Schule bzw. Lehre und Didaktik in die Fachgruppenleitung der Fachgruppe Computeralgebra neu berufen. Wir möchten diesen Anlass nutzen, um aktuelle Entwicklungen des CAS-Einsatzes in der Schule aus unserer Sicht zu skizzieren. Das betrifft einerseits eine Diskussion der technischen Möglichkeiten eines CAS-Einsatzes an Schulen und andererseits eine Reflexion über fachdidaktische Aspekte des Einsatzes von CAS im Mathematikunterricht.

Technische Möglichkeiten eines CAS-Einsatzes an Schulen

Die Vielfalt und kostengünstige Verfügbarkeit an CA-Systemen nimmt in erfreulicher aber zugleich auch fast unüberschaubarer Weise zu. Waren es vor kurzem noch ausschließlich kommerzielle Programme (z. B. Derive oder Maple) oder Taschencomputer im Preissegment von etwa 100 Euro (z. B. TI-Nspire oder Casio Classpad), so ist mittlerweile intuitiv gut bedienbare Software kostenlos downloadbar (z. B. wxMaxima oder Geogebra[1]). Alternativ besteht auch die Möglichkeit CAS-Oberflächen online zu nutzen (z. B. WIRIS oder Omega) oder als „portable“ Version z. B. von einem USB-Stick zu starten (z. B. Maxima Portable[2]). Dies ist gerade für Schulen besonders interessant, da keine Installation der Software im Schulnetzwerk erforderlich ist. Österreich hat sogar eine landesweite Lizenz für WIRIS[3] erworben. Für Deutschland existiert noch keine solche Vereinbarung; eine solche landesweite Lösung für Schulen und Universitäten wäre aber zu begrüßen. Nach Auskunft der Entwickler von WIRIS kann die Oberfläche im Netz auch außerhalb von Österreich für bis zu 1000 Berechnungen für Testzwecke frei genutzt werden. Eine kostenlose aber leider nicht so bedienungskomfortable Alternative zu WIRIS ist z. B. Omega[4], das auch auf mobilen Endgeräten arbeitet.

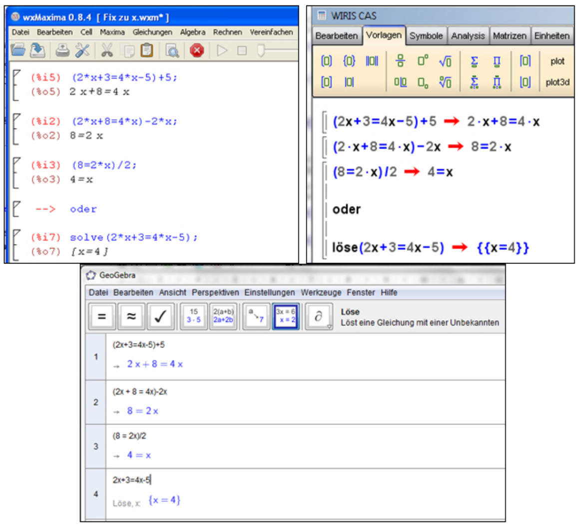


Abbildung 1: *Gleichungen umformen bzw. lösen mit wxMaxima, WIRIS und Geogebra*

Zudem sind inzwischen auch CAS-Applets online nutzbar. Diese können beispielsweise für die individuelle Förderung der Lernenden eingesetzt werden. Auf der WisWeb-Seite[5] des Freudenthal-Instituts in Utrecht findet man eine Vielzahl von CAS unterstützten Algebra-Applets, die von Lernenden sowohl im Unterricht als auch anschließend daheim zum Üben von grundlegenden Fertigkeiten in algebraischen Bereichen

[1] Link zur Downloadseite von wxMaxima: `http://sourceforge.net/projects/maxima/files/` oder auch Geogebra mit CAS. Der Webstart der Beta Version ist verfügbar unter `http://www.geogebra.org/webstart/4.2/geogebra-42.jnlp`

[2] Link zur Downloadseite: `http://www.permucode.com/maxima/`

[3] Link zur Online-Plattform: `http://wiris.schule.at/de_en/index.html` (von „Maths for more“ für Schulen in Österreich bereitgestellt)

[4] Link zur Seite von Omega: `http://www.vroomlab.com:8081/nhome`

[5] Geometrie und Algebra Applets des Freudenthal Instituts in Utrecht:`http://www.fi.uu.nl/wisweb/en/`

wie der Term- oder Gleichungsumformung genutzt werden können. Die Rückmeldungen von Schülerinnen und Schülern, die in die Nutzung der Applets eingeführt wurden, waren positiv. Zudem bestätigten viele schwächere Schülerinnen und Schüler, diese Applets auch privat zu nutzen.

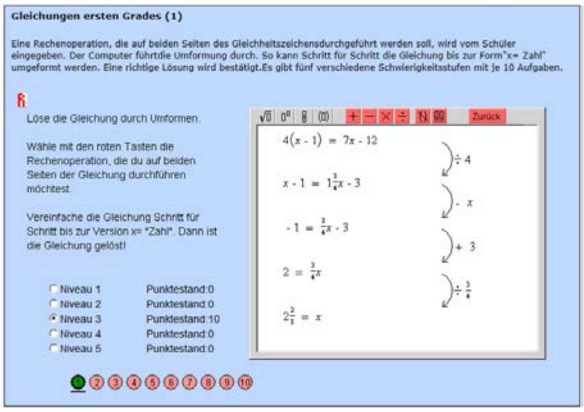


Abbildung 2: *Gleichungsumformung mit einem CAS-Applet*

CAS oder nicht-CAS?

Auch schon in der Schulmathematik der Sekundarstufe I kann es an einigen Stellen interessant sein, ein CAS statt eines grafikfähigen numerischen Taschenrechners zur Verfügung zu haben. Die entsprechenden Geräte nähern sich allerdings immer weiter an, so dass man ohne den CAS-Hinweis des Herstellers bei manchen Funktionen auf den ersten Blick nicht erkennen kann, ob der Taschenrechner nun tatsächlich mit einem CAS oder aber mit einem raffinierten numerischen Verfahren arbeitet. Sogar sehr günstige Taschenrechner (z. B. TI30XPRO oder CASIO fx991DE PLUS) besitzen mittlerweile die Möglichkeit Primfaktorzerlegungen, Wurzelfaktorisierungen oder auch Gleichungslösungen durchzuführen, die in bestimmten Bereichen so exakt arbeiten als ob CAS-Routinen benutzt würden. Die Screenshots in Abb. 3 zeigen z. B., wie der CASIO fx991ES Wurzelausdrücke umformt:

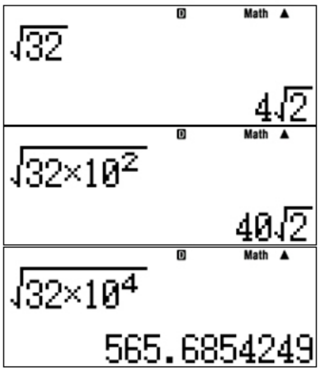


Abbildung 3: *Berechnung von Wurzelausdrücken*

Man könnte zunächst (beim oberen und mittleren Bild von Abb. 3) den Eindruck gewinnen, dass ein CAS genutzt wurde. CA-Systeme zeichnen sich u. a. jedoch dadurch aus, dass sie derartige Termumformungen für beliebig große Zahlen durchführen können. Mit einem CAS sollte der Taschenrechner demzufolge alle Ausdrücke der Form $\sqrt{32 \cdot 10^{2n}}$ symbolisch zu $4 \cdot 10^n \sqrt{2}$ umformen können. Ein CAS kann hier also wegen des unteren Bildes in Abb. 3 nicht vorliegen. Dass die zugrundeliegenden numerischen Algorithmen jedoch sensible Fehlerschranken haben, zeigt das in Abb. 4 wieder mit dem CASIO fx991ES ermittelte (und im Übrigen gar nicht so leicht zu begründende) Rechenergebnis zu den Termen $\sqrt[3]{11+4\sqrt{29}} + \sqrt[3]{11-4\sqrt{29}}$ und $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$, wohingegen wxMaxima uns mit den in Abb. 5 dargestellten Ergebnissen überrascht. Im Übrigen liefern beide Systeme mit unseren Berechnungen jeweils nur die reellen dritten Wurzeln.

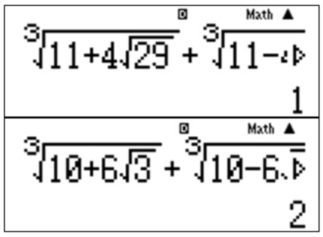


Abbildung 4: *Kubische Wurzelausdrücke mit dem CASIO fx991ES berechnet*

Die Wurzelausdrücke lassen sich gut mit Hilfe des Arbeitsblattes (s. Abb. 9) oder den Formeln von Cardano finden.[6]

```
z:(11+4*sqrt(29))^(1/3)+(11-4*sqrt(29))^(1/3)$
float(z);
1.0
```

```
z:(10+6*sqrt(3))^(1/3)+(10-6*sqrt(3))^(1/3)$
float(z);
2.00000000001
```

Abbildung 5: *Kubische Wurzelausdrücke mit wxMaxima numerisch berechnet*

Da Gleitkommaarithmetik inhärent approximativ ist[7], liefert der Zugang über Langzahlarithmetik (in Abb. 6 dargestellt bezogen auf 1000 signifikante Nachkommastellen) das „gewünschte" Resultat.

```
bfloat((10+6*sqrt(3))^(1/3)+(10-6*sqrt(3))^(1/3)),fpprec:1000;
2.0b0
```

Abbildung 6: $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$ *auf 1000 Nachkommastellen approximiert*

[6] Eine lesenswerte Ausführung zu den Formeln von Cardano, die auch die historische Genese dieser Zahlen betrachtet, findet man z. B. bei Humenberger (2011)

[7] In diesem Zusammenhang ist der Artikel „What every computer scientist should know about floating-point arithmetic" von David Goldberg lesenswert. Er ist verfügbar unter `http://www-users.math.umd.edu/~jkolesar/mait613/floating_point_math.pdf`

Didaktische Möglichkeiten eines CAS-Einsatzes an Schulen

Das Beispiel aus Abb. 5 zeigt, dass nicht alle arithmetisch-algebraischen Probleme aus dem Bereich der Schulmathematik problemlos mit CAS lösbar sind. Daher muss die CAS-Nutzung im Unterricht mit der Vermittlung der entsprechenden Werkzeugkompetenz einhergehen. Bei Drijvers (2011) findet man einige Anregungen, wie CAS in der Schule eingesetzt werden kann. Er sieht die Verwendung von CAS beim Problemlösen, beim Üben und beim Erwerb algebraischer Kompetenzen.

CAS als Hilfe beim Erwerb algebraischer Kompetenzen

Das CAS kann beim Erwerb algebraischer Kompetenzen eingesetzt werden. Dazu müssen besonders in der Sekundarstufe I neue Konzepte entwickelt werden. Ein Beispiel dafür sind die Ideen aus dem Beitrag „Mach Otto zur Null“ (Pinkernell & Diemer 2011) zur Einführung von Termumformungen. Weitere Konzepte für den Einstieg in algebraische Umformungen werden benötigt. Als Anregung dazu wollen wir ein Beispiel aus der Unterrichtspraxis betrachten: Auch heutzutage werden Verfahren, wie etwa die Bestimmung der Nullstellen einer quadratischen Gleichung mit Hilfe der p-q-Formel, immer noch unverstanden ausgeführt. Dabei geht es aus mathematischer Sicht zunächst gar nicht um das konkrete Bestimmen von Nullstellen sondern vorrangig um die Frage nach der Existenz einer allgemeinen Formel zur Lösung quadratischer Gleichungen. Dass das nicht selbstverständlich ist, kann beispielsweise anhand der Gleichung $x^5 + px + q = 0$ verdeutlicht werden. Aus vielerlei Gründen wäre es demnach vernünftiger, sich zunächst im Kontext quadratischer Gleichungen auf die Strategie der quadratischen Ergänzung zu beschränken und diese vor allem anschaulich bzw. geometrisch zu motivieren. Dann könnte die „p-q-Formel“ sogar mit Hilfe eines CAS ermittelt und verwendet werden (vgl. Abb. 7).

Mit der zuvor erworbenen Strategie der quadratischen Ergänzung und Termumformungen kann man nun die Problematik der verschiedenen Darstellungen der gleichen Formel im CAS oder einer Formelsammlung bearbeiten. Gleichzeitig ergibt sich die Möglichkeit für Lernende selbständig weiter zu forschen (vgl. Abb. 8).

```
solve(x^2+p*x+q=0,x);
```

$$[x=-\frac{\sqrt{p^2-4\,q}+p}{2}, x=\frac{\sqrt{p^2-4\,q}-p}{2}]$$

Abbildung 7: *Die „p-q-Formel“ liefert ein CAS*

```
solve(a*x^2+b*x+c=0,x);
```

$$[x=-\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}+b}{2\,a}, x=\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a}]$$

```
solve(a*x^2+b*x+c=d,x);
```

$$[x=-\frac{\sqrt{4\,a\,d-4\,a\,c+b^2}+b}{2\,a}, x=\frac{\sqrt{4\,a\,d-4\,a\,c+b^2}-b}{2\,a}]$$

Abbildung 8: *„Die Mitternachtsformel“ & Co.*

Der Einsatz von CAS bietet für den Mathematikunterricht also auch die Möglichkeit, Formeln ausgehend von einer vom Rechner vorgegebenen Darstellung „top-down“ herzuleiten[8], statt sie wie bisher im Unterricht „bottom-up“ mit möglicherweise unklarer Zielvorstellung zu erarbeiten. Nutzt man ein CAS auf diese Weise, so sind die Ziele der Termumformungen klar definiert, Termumformungen werden intensiv geübt und der Unterricht kann zudem binnendifferenziert organisiert werden, da sich wie in Abb. 8 mit dem CAS neue Möglichkeiten für eigenständige Experimente der Schülerinnen und Schüler ergeben.

CAS als Hilfe beim Üben algebraischer Kompetenzen

CAS kann beim Üben algebraischer Kompetenzen eingesetzt werden. Besonders gut können fertig erstellte Applets hierzu eingesetzt werden. CAS-Applets wie das in Abb. 2 dargestellte des Freudenthal-Instituts Utrecht findet man in zunehmender Anzahl im Internet.

CAS als Hilfe beim Problemlösen

Für den Einsatz von CAS beim Problemlösen gibt es eine Fülle von Unterrichtsvorschlägen und Problembeschreibungen (z. B. Arbeitsblatt „Seltsame Zahlen“ in Abb. 9). Es fehlt aber noch an konkreten und evaluierten Unterrichtsszenarien für den CAS-Einsatz beim Problemlösen. Ebenso fehlen Kriterien für die Erstellung von geeigneten Aufgaben für den CAS-Einsatz in Unterricht und Prüfungen. Dies zeigen z. B. verschiedene Ansichten über den Einsatz von CAS in Unterricht und zentralen Prüfungen (z. B. Kroll 2010) und die Tatsache, dass Prüfungsaufgaben für CAS-Klassen im Zentralabitur wie z. B. in Nordrhein-Westfalen nach wie vor kaum nachgefragt werden.

In jedem Fall ist für die Lösung mathematischer Probleme nach der Schulzeit die Nutzung verschiedener Strategien und Systeme von Vorteil, um z. B. ein Ergebnis auf Richtigkeit zu prüfen. Dies spricht dafür, digitale Mathematik-Werkzeuge im Unterricht möglichst vielfältig, also etwa zum Berechnen, Visualisieren, Kontrollieren, Experimentieren und Algebraisieren einzusetzen (Greefrath 2010).

An der deutlich erkennbaren Analogie zu der vor über 30 Jahren geführten Diskussion zum Einsatz des Taschenrechners im Mathematikunterricht kann man erkennen, dass nicht allein die technischen Möglichkeiten

[8] Das regionale Fachdidaktikzentrum Mathematik und Informatik greift die Idee z. B. unter folgender Adresse auf: `http://rfdz.ph-noe.ac.at/fileadmin/Mathematik_Uploads/GeoGebraCAS/Klasse3_Gleichungen_Unterrichtsmaterial.pdf`

über den praktischen Einsatz von CAS im Mathematikunterricht entscheiden, sondern auch die mit dem Einsatz verbundenen didaktischen Diskussionen und Möglichkeiten. Wir benötigen also didaktisch reflektierte und methodisch durchdachte Lernumgebungen für die neuen technischen Möglichkeiten, die eigenständiges Arbeiten ermöglichen und fördern sowie vor allem die selbstkritische Erziehung der Lernenden zum verantwortungsvollen Werkzeugeinsatz. Dazu gehört schließlich auch eine Sensibilisierung der Lernenden für die Entscheidung, was sie noch im Kopf berechnen und lösen können sollten und was sie dem CAS überlassen.

Literatur

[1] Drijvers, P.; Boon, P.; van Reeuwijk, M. (2011): Algebra and technology. In: Drijvers, P. (Hrsg.): Secondary Algebra Education, 179–202.

[2] Greefrath, G. (2010): Mit dem Computer qualitativ arbeiten? *Praxis der Mathematik in der Schule* 52 Bd. 31, 20–24

[3] Herget, W.; Heugl, H.; Kutzler, B.; Lehmann, E. (2001): Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar? *MNU* 54/8, 458–464.

[4] Humenberger, H. (2011): Wie können die komplexen Zahlen in die Mathematik gekommen sein? – Gleichungen dritten Grades und die Cardano-Formel. *ISTRON: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht.* Band 17, 31–45.

[5] Koepf, W. (2008): Was ist Computeralgebra? *Computeralgebra-Rundbrief*, Sonderheft zum Jahr der Mathematik.

[6] Kroll, W. (2010): Computer-Algebra-Systeme. Didaktische Überlegungen zum Einsatz im Unterricht in Prüfungen. *MNU* 63/5, 304–309.

[7] Pinkernell, G.; Diemer, C. (2011): Mach den Otto zur Null. *Computeralgebra-Rundbrief* 49, 22–26.

Seltsame Zahlen

Berechne die Zahl $\sqrt[3]{11+4\sqrt{29}}+\sqrt[3]{11-4\sqrt{29}}$ mit deinem Taschenrechner! Vertraust du dem Ergebnis? Könnte ein Rundungs- oder Rechenfehler vorliegen? Was meinst du?

Die folgenden Überlegungen zeigen eine Möglichkeit, wie man prüfen kann, ob das Ergebnis stimmt. Begründe hierfür die folgenden Schritte:

1) Aus $a = 11+4\sqrt{29}$ folgt $x = \sqrt[3]{11+4\sqrt{29}}+\sqrt[3]{11-4\sqrt{29}} = \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{22-a}$

2) $$x^3 = a + 3\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\sqrt[3]{22-a} + 3\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{22-a}\right)^2 + 22 - a$$

3) $$x^3 = 22 + 3\left(\sqrt[3]{a^2(22-a)} + \sqrt[3]{a(22-a)^2}\right)$$

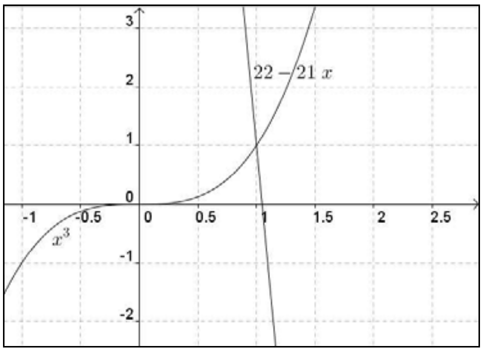
4) $$a^2 = 585 + 88\sqrt{29} \text{ und } (22-a)^2 = 585 - 88\sqrt{29}$$

5) $$x^3 = 22 + 3\left(\sqrt[3]{-3773-1372\sqrt{29}} + \sqrt[3]{-3773+1372\sqrt{29}}\right)$$

6) $$x^3 = 22 - 21\left(\sqrt[3]{11+4\sqrt{29}} + \sqrt[3]{11-4\sqrt{29}}\right)$$

7) $$x^3 = 22 - 21x$$

8) Der Plot von x^3 und $22-21\cdot x$ auf die Vermutung x = 1



9) Die Probe für x = 1 ergibt $1^3 = 22 - 21\cdot 1 \Leftrightarrow 1 = 1$. Daraus folgt …?

Mit dem CAS (Computer-Algebra-System) wxMaxima kann man, wie rechts abgebildet, weitere Zahlen dieser Art berechnen lassen.

- Wähle eine der Zahlen aus und versuche selber eine Begründung für dein Taschenrechnerergebnis zu finden!
- Warum erscheinen in drei Zeilen keine Wurzelausdrücke?
- Versuche, das Programm zu verstehen!
- Verändere das Programm und führe eigene Untersuchungen durch!

```
(%i1) ganzzahlige_wurzelausdruecke(n):=block([z:0,i:1,j:1],
      for i:1 step 1 thru n do [
          for j:1 step 1 thru n do [
                for k:1 step 1 thru n do [
                    z:(i+k*sqrt(j))^(1/3)+(i-k*sqrt(j))^(1/3),
                    y:bfloat(z),fpprec:100,
                    x:floor(bfloat(z+0.5)),fpprec:100,
          if abs(x-y)<10^(-99) then print(i," / ",k," / ",j," / ",z)
      ]]])$

(%i2) ganzzahlige_wurzelausdruecke(20);
```

2 / 1 / 5 / $(\sqrt{5}+2)^{1/3}+(2-\sqrt{5})^{1/3}$
4 / 4 / 1 / 2
4 / 2 / 4 / 2
4 / 1 / 16 / 2
5 / 2 / 13 / $(2\sqrt{13}+5)^{1/3}+(5-2\sqrt{13})^{1/3}$
7 / 5 / 2 / $(5\sqrt{2}+7)^{1/3}+(7-5\sqrt{2})^{1/3}$
9 / 4 / 5 / $(4\sqrt{5}+9)^{1/3}+(9-4\sqrt{5})^{1/3}$
9 / 2 / 20 / $(4\sqrt{5}+9)^{1/3}+(9-4\sqrt{5})^{1/3}$
10 / 6 / 3 / $(2\,3^{3/2}+10)^{1/3}+(10-2\,3^{3/2})^{1/3}$
10 / 3 / 12 / $(2\,3^{3/2}+10)^{1/3}+(10-2\,3^{3/2})^{1/3}$

Abbildung 9: *Arbeitsblatt*