CAS-Einsatz im betriebswirtschaftlichen Umfeld

Markus Wessler
(Hochschule für angewandte Wissenschaften München)

markus.wessler@hm.edu

Zusammenfassung

Seit dem Wintersemester 2009/2010 wird in der Erstsemestervorlesung *Wirtschaftsmathematik* an der betriebswirtschaftlichen Fakultät der Hochschule für angewandte Wissenschaften München der Taschenrechner TI-*n***spire CAS** von Texas Instruments eingesetzt. Dieser Beitrag ist ein Erfahrungsbericht über die ersten beiden Semester.

Einführung

Wer an der betriebswirtschaftlichen Fakultät einer Hochschule mit der Vermittlung von Mathematik zu tun hat, der weiß, dass hier häufig großer Unmut über den mathematischen Lehrstoff geäußert wird, ein Unmut, der sich auf die falsche, aber weit verbreitete Meinung gründet, dass der vermittelte Stoff doch für die Praxis gar nicht relevant sei: „Das brauchen wir doch nie wieder!“ Als Lehrender kämpft man an mehreren Fronten: Die Studierenden, von denen erstaunlich viele der Meinung sind, die Betriebswirtschaft komme gänzlich ohne Mathematik aus, müssen eines Besseren belehrt, motiviert und durch die Prüfungen geschleust werden; gleichzeitig muss die Notwendigkeit eines mathematischen Grundwissens manchmal selbst vor Kollegen verteidigt werden.

Die Vorlesung *Wirtschaftsmathematik*, die im ersten Semester des Bachelor-Studiengangs Betriebswirtschaft vierstündig angeboten wird, soll die für die Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften relevanten mathematischen Methoden bereitstellen. Hierzu gehören u. A. das Lösen linearer Gleichungssysteme, die Differential- und Integralrechnung in einer reellen Variablen, die Differentialrechnung in mehreren reellen Variablen inklusive nichtlinearer Optimierung sowie die lineare Optimierung. Im Wesentlichen handelt es sich also bei den Inhalten um Schulstoff, und zwar nicht nur gymnasialen Schulstoff, sondern auch den Stoff der Fachoberschulen (FOS) oder auch der Berufsoberschulen (BOS), zumindest derjenigen mit wirtschaftlicher Ausrichtung.[1]

Warum CAS-Einsatz?

Orientiert man sich an der sehr praxisbezogenen Ausrichtung des betriebswirtschaftlichen Studiums an der Hochschule München, so wird schnell klar, dass bei den in der Vorlesung behandelten Problemstellungen der Modellierungsaspekt im Vordergrund stehen muss; und dies ist auch vernünftig. Wir gehen üblicherweise in drei Schritten vor: Ein Praxisproblem wird vorgestellt und muss zunächst in ein mathematisches Problem übersetzt werden. Dieses wird dann gelöst und schließlich in einem letzten Schritt wieder im Sinn der Aufgabenstellung interpretiert. In der Praxis werden die Studierenden später Probleme mit Hilfe entsprechender Programme lösen; somit kommt dem ersten und dritten dieser Schritte sicher die größte Bedeutung zu, während das „Rechnen“ in den Hintergrund treten darf. Aufgrund der großen Zahl der Studierenden (rund 200), die auch leider – aus personaltechnischen Gründen – nicht in die eigentlich vorgesehenen Semestergruppen (derzeit vier an der Zahl) eingeteilt werden konnten, musste hierfür eine Lösung gefunden werden, die keinen PC erfordert. So fiel die Wahl auf einen CAS-Rechner, und zwar auf den TI-*n***spire CAS** von Texas Instruments. Der Einsatz war zunächst nur in der Wirtschaftsmathematik geplant; es wurde dementsprechend ein Semestersatz angeschafft. Die Finanzierung erfolgte durch Studiengebühren.

Was war schlecht?

Utopisch wäre die Annahme gewesen, alles werde reibungslos verlaufen; gerade im Umfeld einer BWL-Fakultät war es ein Wagnis, sich auf den Einsatz ei-

[1] Der größte Teil der Studierenden an der Hochschule München hat einen Abschluss von FOS oder BOS; die Abiturientenquote schwankt zwischen 20 % und 30 %.

nes CAS-Taschenrechners einzulassen. Recht schnell konnte man feststellen, dass der CAS-Einsatz einmal mehr ein interessantes Licht auf die Problematik der Schnittstelle Schule/Hochschule wirft. Vieles wurde in den vergangenen Jahren – auch in diesem Rundbrief – von der Entwicklung des CAS-Einsatzes an Schulen berichtet, so etwa *Der Schulversuch CAliMERO* (H. Körner, Rundbrief Computeralgebra Nr. 43, S. 26-30) oder *CAS-Einsatz aus Sicht der Schule* (J. H. Müller, Rundbrief Computeralgebra Nr. 45, S. 24-26). Die Erfahrung mit den Studierenden der Betriebswirtschaft in München lehrt jedoch, dass hier die Realität anders aussieht. Überraschend wenige Studierende verfügten über CAS-Erfahrung aus der Schulzeit oder waren gar auf Anhieb in der Lage, mit dem TI-*n***spire CAS** umzugehen. Die Mehrheit war im Umgang mit dem Taschenrechner sehr hilflos, ja, ungeschickt. Einerseits produzierten Ungenauigkeiten bei der Eingabe (wie etwa bei Klammern) Fehlermeldungen. Tückischer noch waren andererseits syntaktisch korrekte, aber nicht zum gewünschten Ziel führende Eingaben; irgendwo zwischen Problemerfassung, mathematischer Formulierung und Rechnereingabe war dann etwas schief gegangen. Sehr häufig ging es dabei um Probleme mit Variablenbelegungen, die scheinbar unüberwindbare Hürden darstellten. War in ein und derselben Sitzung beispielsweise ein Produktionsvektor x definiert worden – etwa $x = (20, 50)^T$ – und sollte im späteren Verlauf die Ableitung einer Funktion mit Variablen x – etwa $\frac{d}{dx}(x^2)$ gebildet werden, so wunderten sich viele über die Ausgabe $x = (40, 100)^T$: Hier wurde die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ in der Variablen x gebildet, das Ergebnis $2x$ dann aber sogleich mit dem Wert des Vektors x ausgewertet. Hier gab es viel Klärungsbedarf und wurde viel Zeit verloren.

Aber auch als erste technische Schwierigkeiten überwunden waren, lief nicht alles glatt. Beobachten konnte man das bekannte „stumpfe Automatisieren“, das sich auf vielfache Weise manifestierte: im „Ausräumen“ einer Matrix (Anwenden des Gauß-Algorithmus), nach dessen Fertigstellung dann die Frage „... und jetzt?“ steht; im blinden Ableiten, sobald eine Funktion $f(x)$ in der Aufgabenstellung auftaucht, selbst wenn vielleicht nur deren Nullstellen gesucht sind; in der Frage, was denn nun eigentlich der Unterschied zwischen einer Matrix und einem Gleichungssystem sei; etc. Fragen, die überdeutlich machen, wie sehr es an mathematischem Verständnis, am „Gefühl für Mathematik“ mangelt.

Was war gut?

Der TI-*n***spire CAS** kann natürlich eine Hilfe sein, das eben erwähnte Verständnis, das Gefühl für mathematische Zusammenhänge zu entwickeln – und er war es für einen Teil der Studierenden auch. In der konkreten Vorlesungs- und Übungssituation soll das Rechnen zum großen Teil dem CAS überlassen werden; auf diese Weise können auch tatsächliche, realistische Probleme (mit „großen Zahlen“) behandelt werden – einer der wirklich großen Vorteile. Durch schnelle Berechnung hoher Potenzen einer Markov-Matrix etwa (Abb. 1) oder durch das wirklich sehr fruchtbare Zusammenspiel der graphischen, tabellarischen und kalkulatorischen Elemente konnte den Studierenden in vielen Situationen ein gutes Gefühl für die ablaufenden Prozesse vermittelt werden. Ein tieferes Verständnis eben dieser Prozesse ist gerade für angehende Betriebswirte unerlässlich.

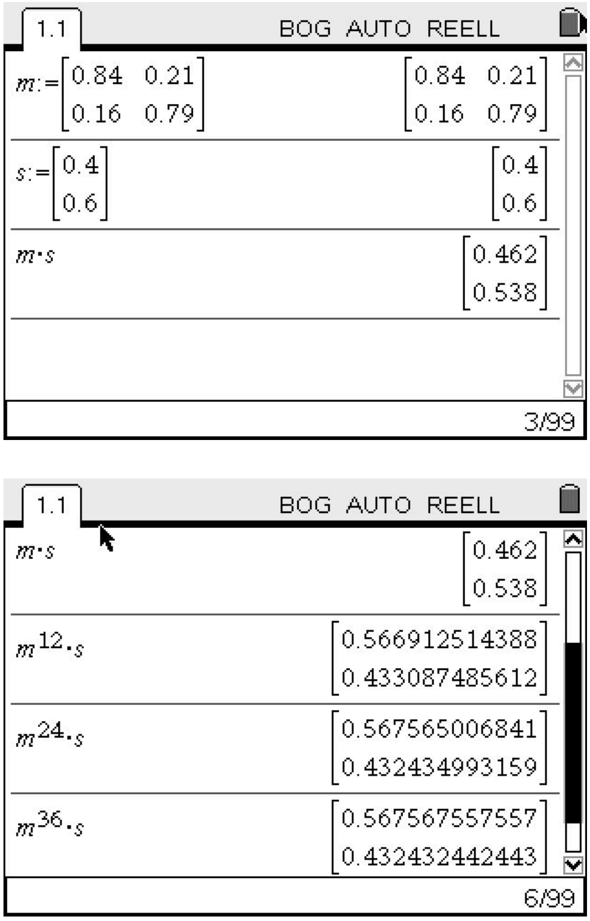

Abbildung 1 – *Eine Markov-Matrix m und ein Startvektor s (Marktaufteilung zu Beginn) werden definiert (oben). Dann werden Potenzen von m mit s multipliziert; der Prozess wird langsam stationär (unten)*

Mit dem TI-*n***spire CAS** war es möglich, in vielen konkreten Situationen schneller zum Ziel zu kommen, sich eben nicht in zu detaillierten Rechnungen zu verlieren, sondern eher den Blick für das Ganze zu schärfen. Die einzelnen Schritte einer Kurvendiskussion etwa per Hand durchführen zu können und sich mühsam den Funktionsgraphen zu konstruieren, dabei aber kaum über ganzrationale Funktionen hinauszukommen: wenig sinnvoll. Viel sinnvoller dagegen: Differentialkalkül und graphische Tools zu nutzen, um den Verlauf vieler Typen von Funktionen zu verstehen und auch zu beobachten, was etwa die Änderung dieses oder jenes Parameters ausmacht. Das konnte mit dem Rechner sehr gut umgesetzt werden, und hier beobachtete man dann auch – und zwar mit Fortschreiten der Vorlesung immer mehr – die so wichtige „Freude am Herumspielen“.

Konkrete Problemlösungen

Nach der Auflistung der eher allgemein gehaltenen Vor- und Nachteile wenden wir uns nun beispielhaft einigen „typischen“ Problemen aus dem betriebswirtschaftlichen Kontext zu, die mit Hilfe des TI-*n***spire CAS** bearbeitet werden können.

Einfache Markov-Prozesse können etwa verkleidet in einen Marketing-Kontext eingeführt werden, bei dem für eine Stichprobe von Verbrauchern das „Abwanderungsverhalten“ zwischen einer gewissen Menge von Konkurrenzprodukten mit Hilfe einer Markov-Matrix beschrieben werden kann. Zentral ist hierbei wieder die Modellierung: Idealerweise kommen die Studierenden von selber auf die Tatsache, dass das Problem mit Hilfe einer Matrix angegangen werden kann. (Sehr hilfreich dafür ist ein tieferes Verständnis der Matrizenmultiplikation; ein solches wird an früherer Stelle in der Vorlesung bereits im Rahmen mehrstufiger Produktionsprozesse hergeleitet.) Die Studierenden sollen sich nun überlegen, wie diese Matrix dann konkret aussieht und welche ihrer Eigenschaften typische Eigenschaften sind (etwa: Spaltensumme ist stets gleich 1). Dann folgt der Rechenschritt, schnell und unkompliziert mit dem Rechner durchzuführen: Die längerfristige Marktentwicklung ergibt sich durch Multiplikation eines Startvektors mit hohen Potenzen der Markov-Matrix. Dies kann – auch für große Matrizen und hohe Potenzen – schnell durchgeführt werden. Dabei stellen die Studierenden wiederum etwas fest, nämlich dass sich irgendwann die Marktaufteilung nicht mehr ändert – allerdings nur sofern die Übergangsmatrix konstant bleibt. Hier werden die Studierenden nahezu spielerisch an eine Art Grenzwertbegriff herangeführt, der den meisten aus der Schulzeit eher ein wenig unheimlich ist. Anschließend kann die Realitätstauglichkeit eines solchen einfachen Modells mit konstanter Übergangsmatrix diskutiert und können mögliche Varianten überlegt werden.

Der Umgang mit Matrizen wird natürlich auch im Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen ausführlich eingeübt. In der Vorlesung wird hier großer Wert darauf gelegt, die strukturellen Feinheiten zu verstehen – so etwa die Formulierung eines solchen Systems als Matrixgleichung $A \cdot x = b$, die Abhängigkeit der Lösungsmenge von der Koeffizientenmatrix A und im quadratischen Fall die Bedeutung der inversen Matrix A^{-1} in diesem Zusammenhang – dass nämlich durch $x = A^{-1} \cdot b$, also das „Auflösen“ der Matrixgleichung nach x, eine eindeutige Lösung geliefert wird. Das Matrizenkalkül des TI-*n***spire CAS** ist hier syntaktisch sehr konsistent und leicht verständlich. Neben dem Rechnen mit inversen Matrizen steht mit dem Befehl `rref` („reduced row echelon form“) auch eine Möglichkeit zur Verfügung, die erweiterte Koeffizientenmatrix nach weitestmöglicher Durchführung des Gauß-Algorithmus und somit unmittelbar die Lösung zu bestimmen.

In Abb. 2 (unten) sieht man zwei Beispiele für die Verwendung von `rref`: den Fall eindeutiger Lösbarkeit (hier mit $x_1 = -9$ und $x_2 = 4$) sowie den Fall nicht eindeutiger Lösbarkeit, erkennbar an der Nullzeile. Hier kann außerdem eine mögliche Parametrisierung der Lösungsmenge einfach abgelesen werden: Die Nullzeile ermöglicht eine freie Wahl für x_3, und die beiden anderen Komponenten ergeben sich in Abhängigkeit davon: $x_2 = 1 - 2x_3$ und $x_1 = x_3 - 1$.

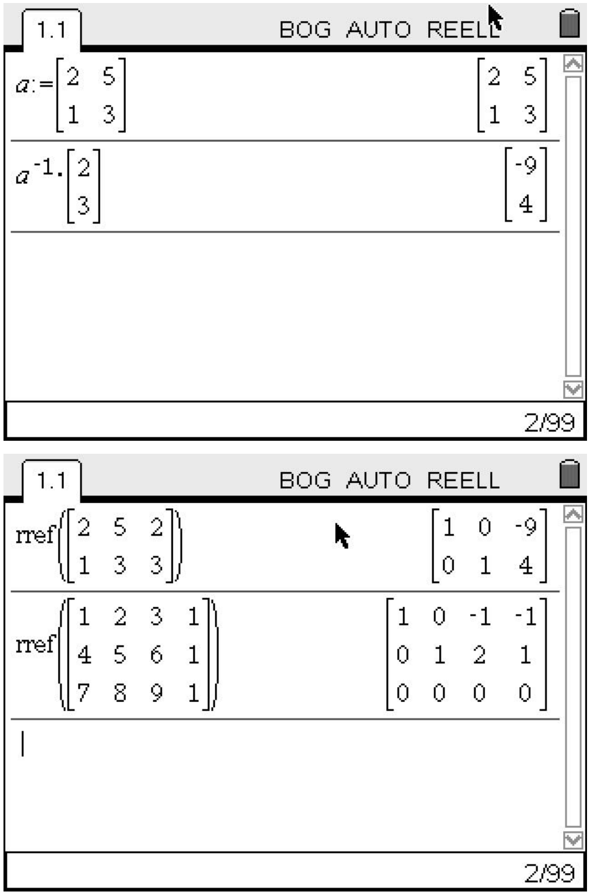

Abbildung 2 – *Das Lösen eines linearen Gleichungssystems mit Hilfe von Matrizen: mit der inversen Koeffizientenmatrix (oben) oder mit dem Befehl* `rref` *(unten)*

Auch das Optimieren von Funktionen in mehreren Variablen lässt sich schnell und bequem durchführen. Bei einer Standardaufgabe geht es etwa darum, bei einer Produktion von zwei Gütern, die in x und y gemessen werden, den Gewinn $g(x, y)$ zu maximieren, der etwa durch

$$g(x, y) = 70x - x^2 + 50y - y^2 - 10xy - 1.000$$

gegeben ist. Dieses Optimieren kann frei durchgeführt werden, was als Lösung $x = 3,75$ Mengeneinheiten (ME) und $y = 6,25$ ME ergibt. Praxisrelevanter ist der Fall, bei dem unter einer Nebenbedingung maximiert wird. Sollen etwa von beiden Produkten gemeinsam 12 ME hergestellt werden – eine Bedingung, die das globale Maximum eben nicht erfüllt – so kommt man hier mit einer Variablensubstitution an die Lösung $x = 4,75$ ME und damit $y = 7,25$ ME. Beides ist in Abb. 3 (oben) dargestellt. Anhand dieses einfachen Beispiels kann übrigens auch die Lagrange-Methode gut eingeführt werden (siehe Abb. 3 (unten)). In beiden Fällen greift man hier auf das Lösen eines Gleichungssystems mit Hilfe von `solve` zurück.

Die Unterscheidung zwischen freiem und gebundenem Optimieren – also zwischen dem globalen Maximum, das die Funktion $g(x, y)$ besitzt, und dem an die Nebenbedingung $x + y = 12$ geknüpften Maximum – ist ein zentraler Punkt in der Vorlesung. Die Studierenden sind nach entsprechenden wegbereitenden Überlegungen in der Lage zu erkennen, dass es sich bei dem Graphen zu $g(x, y)$ um ein nach unten geöffnetes Paraboloid handelt. Solche Flächen sind im Vorfeld mit Hilfe von *Mathematica* gezeigt worden, und interessanterweise steht der größte Teil der Studierenden diesen geometrischen Aspekten recht offen gegenüber – eine Tatsache, die bei weitem in einer betriebswirtschaftlichen Vorlesung nicht offensichtlich ist. So kann man ganz anschaulich – zumindest im Zwei-Variablen-Fall – darstellen, wie die Ebene der linearen Nebenbedingung (in unserem Fall $x + y = 12$) aus dem Paraboloid zur Gewinnfunktion eine Parabel „ausschneidet", deren Maximum existiert und sich dann als Maximum von $g(x, y)$ unter der Nebenbedingung herausstellt.

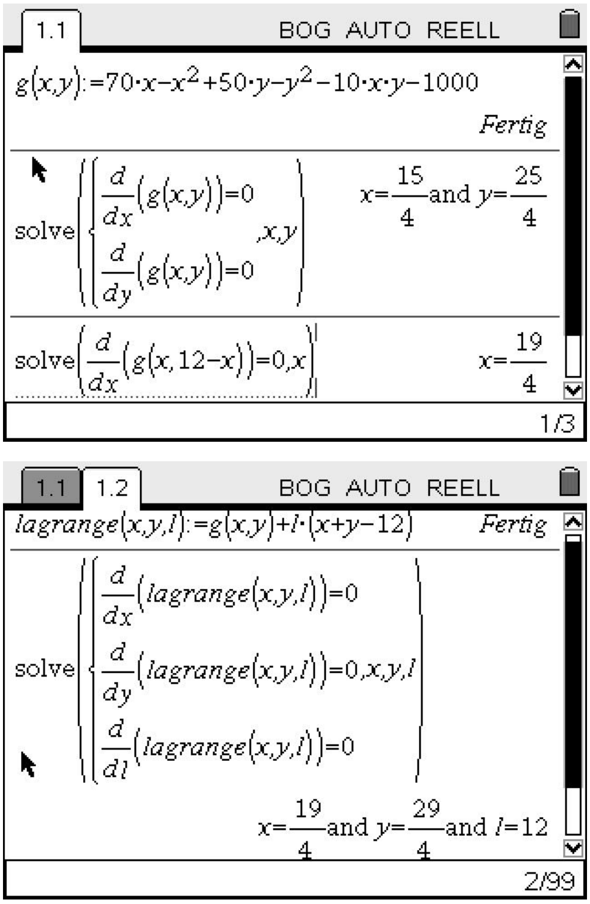

Abbildung 3 – *Optimieren einer Gewinnfunktion in zwei Variablen: frei sowie unter der Nebenbedingung* $x + y = 12$ *mit Variablensubstitution (oben) oder mit der Lagrange-Methode (unten)*

Leider stößt der TI-*n***spire CAS** hier mit seinen Graphik-Fähigkeiten an seine Grenzen. Darstellungen im Dreidimensionalen wären sehr wünschenswert, müssen aber wie gesagt durch den (dann leider nur frontalen) Einsatz eines zusätzlichen CAS geleistet werden. Aber auch bei zweidimensionalen Darstellungen, zumindest beim Zeichnen von Funktionsgraphen, erweist sich die Graphik-Fähigkeit des TI-*n***spire CAS** als noch nicht vollendet. Das Hinein- und Heraus-Zoomen oder auch die vielgerühmte Grab-Funktion sind in der Praxis sehr umständlich zu handhaben.

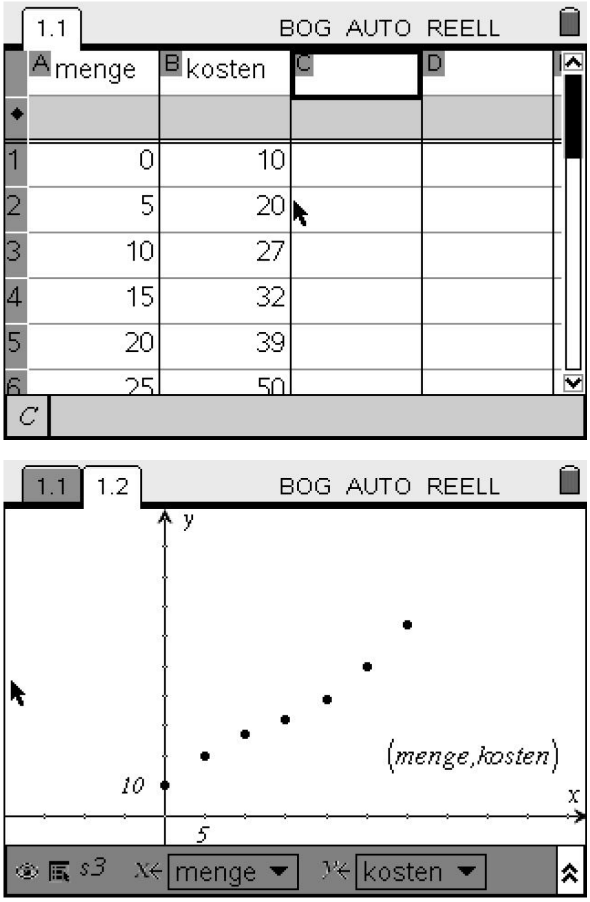

Abbildung 4 – *Eingabe der Mengen und Kosten in die Tabelle (oben) und Darstellung der entsprechenden Punkte durch einen Streuplot (unten)*

Ein weiterer interessanter Punkt ist die sogenannte *Lists-and-Spreadsheet*-Anwendung, eine Tabellenkalkulation. Die hier implementierten statistischen Funktionen etwa bieten eine breite Palette dessen, was angehende Betriebswirtschaftler besonders interessieren sollte. In der Anfängervorlesung zur Statistik lernen die Studierenden beispielsweise das lineare Regressionsmodell kennen, das im Rahmen der Wirtschaftsmathematikvorlesung mit praktischen Berechnungen aufgegriffen und erweitert wird: so etwa bei der Modellierung einer Kostenfunktion. Ausgehend von einer gegebenen Tabelle mit Kostenwerten sollen die Studierenden entscheiden, von welchem Typ die Kostenfunktion wohl ist: linear, quadratisch oder – ein wichtiges Standardmodell – kubisch-ertragsgesetzlich. Den typischen Verlauf einer solchen ertragsgesetzlichen Funktion (streng monoton wachsend mit einem Wendepunkt, bei dem degressives in progressives Wachstum übergeht) kennen die Studierenden teils bereits aus der Schule. Anhand der graphischen Darstellung mittels eines Streuplots durch Punkte im Koordinatensystem überlegen sich die Studierenden, welches Modell wohl am besten zutrifft; dann kann die entsprechende Regression durchgeführt werden: linear, kubisch, exponentiell, logistisch usw. In Abb. 4

ist ein solches Tabellenblatt mit zugehörigem Streuplot dargestellt. Hier wird aus der Graphik ersichtlich, dass die Wachstumsraten zunächst zurückgehen und dann ab einem gewissen Punkt zunehmen. Die Studierenden schließen daher auf das Modell einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion dritten Grades und führen mit dem TI-*n***spire CAS** die entsprechende Regression durch.

Fazit

Das (vorläufige) Fazit aus zwei Semestern CAS-Einsatz ist ein gemischtes. Dass nicht alle Studierenden überzeugt werden konnten, lag sicher zum Teil mit an einem bisher noch nicht erwähnten technischen Aspekt, der natürlich mehr in den Strukturen an der Hochschule begründet ist: Da die konkrete Zahl der Erstsemester-Studierenden sehr großen Schwankungen unterworfen ist, war die Einschätzung der Zahl der zu bestellenden Rechner schwierig; tatsächlich wurden zunächst zu wenige bestellt, und die Nachbestellung während des laufenden Semesters wurde durch Verwaltungsakte verzögert. Einige Studierende mögen sich vielleicht aus diesem Grund zögernder auf den Rechner eingelassen haben.

Was ursprünglich beabsichtigt war, nämlich bei den Studierenden ein größeres Interesse für die Analyse, ja durch die Programmierbarkeit mancher Problemstellungen vielleicht sogar Freude eben am Programmieren selber zu wecken, ist nur zum Teil gelungen. Der Anspruch, hier alle Studierenden zu erreichen, erwies sich als deutlich zu hoch. Bemerkenswert aber ist durchaus, dass sich, gerade bei fortschreitender Vorlesung, doch mehr und mehr Studierende auf den Rechner einließen. Die Vermutung lag jedoch recht nahe (und bestätigte sich dann auch), dass es sich hierbei um die „besseren“ Studierenden handelt. Einmal mehr gilt hier das oft zitierte Klischee: „Computeralgebrasysteme machen die Guten besser und die Schlechten schlechter...“ Das zu ändern und auch die weniger Starken mit dem CAS zu erreichen, ist das Ziel; der CAS-Einsatz in der Wirtschaftsmathematik jedenfalls geht weiter.