Dokumentation von Schülerlösungen mit CAS – ein Diskussionsbeitrag

Carsten Stauch
(Gymnasium Coswig)

stauch@gymnasiumcoswig.de

Zusammenfassung

Der Einsatz von CAS-Tools im Mathematikunterricht erfordert auf vielfältige Art ein Umdenken bei der Vermittlung mathematischer Inhalte. Über die Notwendigkeit angepasster Aufgabenstrukturen herrscht weitgehend Einigkeit. Ein ebenfalls wichtiger Bereich wurde bislang kaum untersucht: die Dokumentation von Lösungswegen. Dieser Artikel soll einen ersten Überblick über die spezifische Problematik vermitteln und mögliche Ansätze aufzeigen.

Einleitung

Bezogen auf den Mathematikunterricht wird kaum ein anderes Thema so kontrovers diskutiert, wie der Einsatz von Computer-Algebra-Systemen (CAS) in der Schule. Während die Befürworter den Einsatz solcher Tools als unverzichtbar für modernen Mathematikunterricht und als Chance ansehen, befürchten Kritiker die Abkehr von der reinen Lehre der „richtigen Mathematik“. Nicht minder umstritten ist selbst unter den CAS-Befürwortern, wie eine angemessene Dokumentation von Schülerlösungen erfolgen sollte. Einige Diskussionspunkte sind: Dürfen tool-spezifische Befehle zur Dokumentation verwendet werden? Oder sind sie vielmehr komplett zu vermeiden? Ist es notwendig, jede Rechnerausgabe vom Display abzuschreiben? Eine zu starke Komprimierung der Lösungsdokumentation birgt ebenfalls Gefahren: Ein Fehler bei der Dateneingabe in das CAS-Tool ist dann nicht mehr nachvollziehbar und führt unter Umständen zu einer Bewertung mit 0 Punkten – obwohl der Schüler die Problematik vollständig durchdrungen hat. Folgendes Beispiel soll die große Divergenz der Auffassungen anhand einer typischen Rechenaufgabe illustrieren:

> Berechnen Sie die Fläche, die vom Graphen der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^2$ mit der x-Achse und den beiden Geraden $x = 3$ und $x = 6$ eingeschlossen wird.

Aus verschiedenen Diskussionsrunden mit Fachkollegen kenne ich die folgenden Varianten, wie Lösungswege zu dokumentieren sind:

(1) $\int_3^6 x^2dx = 63$; mit Taschenrechner; $A = 63$ FE

(2) $\int_3^6 x^2dx = 63$; kbd→Int(x^2,x,3,6)⇒ $A = 63$ FE

(3) $\int(x^2, x, 3, 6) = 63$ FE

(4) $\int_3^6 x^2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^6 = 72 - 9 = 63$; $A = 63$ FE

Die Varianten (3) und (4) sind dabei Extremfälle: (3) verzichtet auf die mathematische Notation, der Lösungsweg wird auf die Angabe eines rechnerspezifischen Befehls reduziert, darüber hinaus ist das Integral eine reelle Zahl, keine Fläche; in (4) wird die Rechnerbenutzung ad absurdum geführt. Die eigentliche Frage ist aber an dieser Stelle nicht, welche Variante die richtige ist, sondern warum man einem Schüler, der ein CAS benutzt, diese Aufgabe überhaupt stellt. CAS-Kritiker, die in diesem Zusammenhang gern von „Push-Button-Mathematik“ sprechen, haben Recht, wenn sich Lernende nur mit Aufgaben auf diesem formalen Niveau auseinandersetzen müss(t)en. Über den Nutzen von CAS und einer angemessenen Aufgabenkultur muss demnach Klarheit geschaffen werden, ehe man die Diskussion der Lösungsdokumentation fortführt.

CAS im Unterricht

In den Bildungsstandards für das Fach Mathematik werden drei unverzichtbare Grunderfahrungen, die dem Schüler durch den Mathematikunterricht vermittelt werden sollen, genannt. Eine davon begreift „Mathematik als Mittel zum Erwerb von auch über die Mathematik hinausgehenden, insbesondere heuristischen Fähigkeiten.“ Mathematikunterricht hat also die Aufgabe, nicht nur reine Rechenfähigkeiten sondern auch heuristische Fähigkeiten wie die Schulung logischen Denkens, der Problemlösefähigkeit und das Arbeiten mit

Modellen zu entwickeln und zu schulen. Und viele Literaturbeiträge zeigen: CAS-Systeme ermöglichen dies an vielen Stellen des Mathematikunterrichtes.

Idealerweise findet mit Hilfe von CAS eine Kompetenzverschiebung vom rein algorithmisch basierten Rechen zum Problemlösen statt. Eine Verschiebung, keine Ablösung, denn ohne mathematische Grundfähigkeiten beim Umformen von Termen ist kein Schüler in der Lage, die Ausgaben eines CAS zu interpretieren bzw. auch nur das mathematische Problem in die Syntax des Tools zu übersetzen. Ein Blick auf die KMK-Bildungsstandards für das Fach Mathematik zeigt deutlich, dass der Schwerpunkt der Schülertätigkeit nicht mehr nur im reinen Rechnen oder händischer Arbeit mit den mathematischen Objekten liegen soll, sondern auch in der mathematischen Modellierung von realen oder zumindest realitätsnahen Sachverhalten, deren Umsetzung mit einem Tool sowie der Interpretation der Ergebnisse des CAS. Alle sechs hier [1] geforderten Kompetenzbereiche können bei einem problemorientierten Einsatz von CAS gestärkt werden. Neben den Aufgabeninhalten ist der angemessene Operatoreneinsatz eben so wichtig. Darf ein Schüler CAS benutzen, so ist für das o.a. Beispiel der Flächenberechnung nur „Geben Sie an …“ eine sinnvolle Wahl, wenn es nur um die richtige Angabe einer Flächenmaßzahl geht. Für einen Schüler, der mit CAS arbeitet, ist das Beispiel als Prüfungsaufgabe demnach ungeeignet. Günstiger ist es, die Aufgabe einzukleiden, so dass der Schüler aus dem Kontext erkennen muss, dass eine Flächenberechnung mit Hilfe der Integralrechnung notwendig ist und diese anwendet. Sinnvoll ist es weiterhin, wenn auch die Bedeutung der Integrationsgrenzen erläutert werden müssen. CAS-Prüfungsaufgaben sollten deshalb nicht rein formal sein, sie müssen zusätzliche Denkleistungen erfordern wie Modellbildung, Transformation des Ansatzes in eine geeignete Syntax oder die Interpretation der Ausgaben des Tools. Aufgaben, die entdeckendes Lernen fördern, sind meist offener gestaltet. In Prüfungssituationen sind Erwartungshorizonte deutlich schwieriger zu operationalisieren. Deshalb finden sie bei den folgenden Betrachtungen keinen Raum.

Anforderungen an die Dokumentation

Verbindliche Vorgaben für die Dokumentation von Schülerlösungen finden wir in den Bildungsstandards:

> Für die Beurteilung der Prüfungsleistungen sind sowohl die rein formale Lösung als auch das zum Ausdruck gebrachte mathematische Verständnis maßgebend. Daher sind erläuternde, kommentierende und begründende Texte unverzichtbare Bestandteile der Prüfungsleistung. Dies gilt auch für die Dokumentation des Einsatzes elektronischer Werkzeuge. Mangelhafte Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen oder unzureichende oder falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text sind als fachliche Fehler zu werten. Die Beurteilung schließt mit einer Bewertung der von den Prüflingen erbrachten Leistung ab.[1]

Mathematisches Verständnis muss demnach zum Ausdruck gebracht werden; Fehler in der Fachsprache sind als Fehler zu werten. Damit ist die Verwendung mathematischer Notation verpflichtend. Eine Kette von Rechnerbefehlen allein kann aus diesem Grund nicht als vollständige Dokumentation angesehen werden. Es lässt sich aber kein Verbot von Rechnerbefehlen aus den Bildungsstandards ableiten. Zusätzlich zum mathematischen Ansatz können sie durchaus sinnvoll den Lösungsweg des Schülers illustrieren. Eine logische Gliederung von Argumenten ist unverzichtbar. Je komplexer die Aufgabenstellung, desto wichtiger ist die übersichtliche Struktur des Lösungsweges. Nur dadurch wird gewährleistet, dass die Darstellung der Lösung nachvollziehbar und eindeutig ist. Nachvollziehbarkeit und Eindeutigkeit erfordern insbesondere bei komplexen Aufgaben oder Aufgaben in Sachzusammenhängen eine Strukturierung des Lösungsweges inklusive begleitender Textstellen. Aus der Dokumentation muss auch der Hilfsmitteleinsatz abzuleiten sein. An welchen Stellen der Problemlösung wurde ein Tool eingesetzt? Welche Tools wurden genutzt? In vielen Fällen ist dies sehr eindeutig: wird zum Beispiel der solve-Befehl zum Lösen einer Gleichung genutzt, bedarf dies nur einer kurzen Erwähnung.

Zusammengefasst ergeben sich drei Anforderungskriterien:

- Verwendung der mathematischen Notation (Einhaltung der Fachsprache)
- Nachvollziehbarkeit (Gliederung, Kommentierung)
- Eindeutigkeit (logische Struktur)

Eine Lösungsdokumentation darf nicht ausschließlich aus rechnerspezifischen Befehlen bestehen, zur Unterstützung der Nachvollziehbarkeit können sie aber zusätzlich angegeben werden. Die Beachtung von sprachlichen Normen (Orthografie, Grammatik) wird an dieser Stelle als selbstverständlich vorausgesetzt und ist kein Spezifikum von CAS-Lösungen. Drei Aufgabenbeispiele und Lösungsvorschläge bei denen die Nutzung von CAS erlaubt ist sollen dies dokumentieren:

Beispiele

Aufgabenbeispiel 1

> Diskutieren Sie die Anzahl der Lösungen der Gleichung
> $2x^2 + 4ax + 64 = 0;\ \ a, x \in \mathbb{R}$
> in Abhängigkeit von a.

Lösungsvorschlag

$2x^2 + 4ax + 64 = 0$; Lösen der Gleichung mit Tool

$x_{1/2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 32}$
Untersuchung der Diskriminante $D = a^2 - 32$
Eine Lösung: $D = 0 \to a = \sqrt{32}$
Keine Lösung: $D < 0 \to -\sqrt{32} < a < \sqrt{32}$
Zwei Lösungen: $D > 0 \to a < -\sqrt{32}$ oder $a > \sqrt{32}$

Einordnung
Die Aufgabe ist zweifellos auch ohne jedes Hilfsmittel lösbar, sinnvoll wäre sie für Schüler, die den Umgang mit einem neuen CAS-Tool erlernen.

Kommentar
Der dargestellte Lösungsweg erfüllt die drei angegebenen Kriterien; ein CAS-Tool liefert lediglich die Lösungen der (Un-)Gleichungen. Die Angabe des dazugehörigen Befehls ist nicht notwendig. Der Schüler muss die Reihenfolge seiner Überlegungen darlegen und die Ergebnisse des CAS interpretieren.

Aufgabenbeispiel 2

> Zeigen Sie, dass jede ganzrationale Funktion 3. Grades punktsymmetrisch zu ihrem Wendepunkt ist.

Lösungsvorschlag
Jede ganzrationale Funktion 3. Grades besitzt einen Wendepunkt
Funktionsdefinition $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \ a \neq 0.$
f', f'' berechnen (Tool)
$f''(x) = 0 \iff x_W = \frac{-b}{3a};\ \ y_W = f(x_W)$
Wendepunkt $W\left(x_W; y_W\right)$
Es gilt

$$f\left(x_W - x\right) - y_W = ax^3 - \frac{b^2 x}{3a} + cx$$

und

$$-\left(f\left(x_W + x\right) - y_W\right) = ax^3 - \frac{b^2 x}{3a} + cx$$

also

$$f\left(x_W - x\right) - y_W = -\left(f\left(x_W + x\right) - y_W\right),$$

damit ist f punktsymmetrisch zu W

Einordnung
Die Aufgabe ist im Anforderungsbereich III der Sekundarstufe II einzuordnen. Sie erfordert einen sicheren Umgang mit Funktionseigenschaften sowie deren Vernetzung und Abstraktion.

Kommentar
In diesem Beispiel wird die CAS-Fähigkeit genutzt, symbolisch mit Funktionen zu arbeiten. In der dargestellten Lösung wird deshalb die Definition der Funktion angegeben; dies ist die Grundlage für die weiteren Operationen des CAS. Dagegen wird auf die Angabe der konkreten Terme verzichtet – sie bringen keine weitere Steigerung der Nachvollziehbarkeit. Die für den Nachweis notwendigen Schritte sind angegeben, das Tool führt lediglich die Termumformungen durch. Durch Vergleich der beiden Terme findet der Schüler den geforderten Nachweis.

Aufgabenbeispiel 3

> Gegeben sind die Ebene E_a mit der Gleichung $E_a\ :\ 3x + 2ay - z\ =\ 0$ und die Gerade g_a mit der Gleichung
> $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a+2 \\ -3 \\ 3-a \end{pmatrix};\ \ t, a \in \mathbb{R}.$
>
> Berechnen Sie den maximalen Schnittwinkel zwischen E_a und g_a. Weisen Sie nach, dass es sich um ein Maximum handelt.
> Prüfen Sie, ob es einen minimalen Schnittwinkel gibt.

Lösungsvorschlag
Sei $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Normalenvektor von E_a und $\vec{u}$ der Richtungsvektor von g_a
$\sin\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|};\ \ 0 \leq \alpha < 90°$
$h\left(a\right) = \sin\alpha = \frac{\left|\frac{3}{2} - a\right|}{\sqrt{(a^2 - a + 11)\cdot(2a^2 + 5)}}$
Da $\arcsin(x)$ im Intervall $[-1, 1]$ streng monoton steigend ist, besitzen $h\left(a\right)$ und $\arcsin(h\left(a\right))$ hier die gleichen Extremstellen. $h'\left(a\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(h\left(a\right)\right); h''\left(a\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(h'\left(a\right)\right)$
$h'\left(a\right) = 0 \Leftrightarrow a_1 \approx -0,997$ und $a_2 \approx 4,317$
$h''\left(-0,997\right) < 0 \Rightarrow$ Maximum;
$\alpha_1 \approx \left|\arcsin h\left(a_1\right)\right| \approx 4,9°$
$h''\left(4,317\right) < 0 \Rightarrow$ Maximum;
$\alpha_2 \approx \left|\arcsin h\left(a_2\right)\right| \approx 15,2°$
Das Minimum von $h(a)$ ergibt durch die Betragsbildung bei der Schnittwinkelberechnung einen maximalen Schnittwinkel; damit ist $15,2°$ das globale Maximum des Schnittwinkels.
$h(a)$ hat eine Nullstelle für $a = 1,5$, d. h., der Schnittwinkel α beträgt $0°$. Durch Einsetzen von g_a in E_a erhält man: $g_a \bigcap E_a = \{\}$, d. h., Gerade und Ebene sind echt parallel, im engeren Sinne existiert kein Schnittwinkel; wegen $\lim_{a\to 1,5} h\left(a\right) = 0$ existiert kein kleinster Schnittwinkel.

Einordnung
Die Aufgabe vernetzt Analysis und analytische Geometrie und erfordert beim Schüler ein sicheres Grundwissen, um die erforderlichen Vernetzungen zu erkennen und anzuwenden.

Kommentar
Durch den Einsatz eines CAS-Tools kann sich der Schüler auf die mathematisch notwendigen Schritte

konzentrieren.
Erläuterungen zu den einzelnen Berechnungen sind notwendig. Wegen des geforderten Nachweises des Extremums muss der Schüler die Mittel der Differentialrechnung einsetzen. Er hat entweder die Wahl eine Betragsfunktion zu differenzieren oder berücksichtigen, dass die Minimalwerte auf maximale Schnittwinkel führen können. Das ursprünglich geometrische Problem führt auf einen analytischen Formalismus. Für die Lösung reicht formales Arbeiten aber nicht aus – zusätzliche Überlegungen erfordern begleitende Texte des Schülers. Ein Abschreiben der zum Teil sehr komplizierten Terme erhöht auch in diesem Beispiel nicht die Nachvollziehbarkeit.

Fazit und Ausblick

Neben der inhaltlichen Richtigkeit der Schülerlösung liegt der Schwerpunkt bei der Dokumentation auf Nachvollziehbarkeit und Eindeutigkeit. Da ein CAS-Tool dem Schüler große Teile der formalen Rechnung abnimmt, verschiebt sich er Fokus auf die Strukturierung und Interpretation der Ergebnisse. Bei komplexen Aufgaben sollte die Lösungsdokumentation nicht zu einer „Abschreibeübung" degenerieren, sondern vielmehr die gedankliche Durchdringung des Sachverhaltes und seine mathematische Modellierung in den Vordergrund setzen. Insbesondere Gültigkeitsbedingungen gehören zu einer vollständigen Lösungsdarstellung. Aus diesem Grunde erachte ich das Primat der mathematische Notation gegenüber tool-spezifischen Befehlen als unabdingbar.
Die Beispiele sollen verdeutlichen, dass es für das „Abschreiben der Display-Ausgabe" keine einheitlichen Vorgaben geben kann. Im ersten Beispiel muss die Diskriminante diskutiert werden. Daher ist die Angabe des Terms bzw. der Lösungen sinnvoll. Im zweiten Beispiel sind die Funktionsterme von f' und f" nicht unmittelbarer Gegenstand der Diskussion, also ist eine Angabe (Abschreiben) meines Erachtens nicht zwingend erforderlich.

Eine Alternative zu herkömmlichen „Papier-und-Stift"- Varianten für die Lösungsdokumentation könnten perspektivisch die von Casio für die Classpad-Serie eingeführten eActivities oder gleichwertige Systeme darstellen. Abb. 1 zeigt eine mögliche Lösung zu Aufgabenbeispiel 1 mit Hilfe von eActivities. Damit können der mathematische Ansatz, die Umsetzung mit dem Rechner und begleitender Text sehr übersichtlich und strukturiert kombiniert werden. Es wird deutlich, welche Komponenten des Tools genutzt wurden. Darüber hinaus sind eventuelle Fehleingaben des Schülers nachvollziehbar. Natürlich hat auch diese Variante Nachteile: Angefangen bei der Übermittlung des eActivities vom Schüler an den Lehrer – unter den Bedingungen des Schulalltags, also möglichst effektiv und sicher. Das ist ein technisches und organisatorisches Problem. Schwierig gestaltet sich ebenfalls das Setzen von (elektronischen) Korrekturzeichen.

Grundlage meiner Ausführungen ist meine Überzeugung, dass eine wichtige Aufgabe des Mathematikunterrichtes die Entwicklung und Stärkung der Fähigkeit zum und der Freude am logischen Denken ist. Dies kann man mit und ohne CAS-Tools erreichen. Aber wenn CAS im Unterricht eingesetzt wird, dann müssen seine spezifischen Vorzüge genutzt werden, dann sollte der Schwerpunkt auf den mathematischen Zusammenhängen liegen, auch und gerade bei der Dokumentation von Lösungswegen.

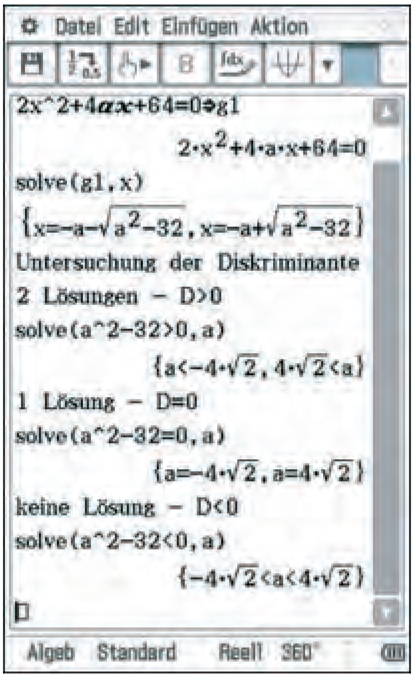

Abbildung 1: *Eine Lösung mit eActivity*

Literatur

[1] Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife, KMK 18.10.2012.