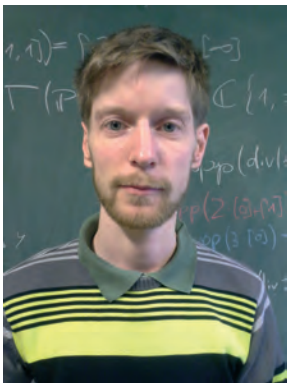

Die Taylorauflösung von Monomidealen

Lars Kastner,
FU Berlin

kastner@math.fu-berlin.de

Einführung

Auflösungen von Moduln stehen am Anfang der Antwort vieler Fragestellungen der kommutativen Algebra. Gegeben ein Monomideal I, wollen wir einen endlichen Komplex

$$C_\bullet: \ 0 \to C_n \xrightarrow{\partial_n} \dots \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \to 0$$

von freien Moduln C_i finden, sodass

$$\ker \partial_i = \operatorname{Im} \partial_{i+1}$$

für alle $i \neq 0$. An der Stelle $i = 0$ fordern wir

$$\ker \partial_0 \big/ \operatorname{Im} \partial_1 = C_0 \big/ \operatorname{Im} \partial_1 = R \big/ I \, .$$

Da Monomideale graduiert sind, lässt sich sogar eine Auflösung durch graduierte freie Moduln konstruieren. Erste Anwendungen sind z. B. die Bestimmung der (graduierten) Betti-Zahlen sowie die Berechnung der Funktoren Ext und Tor.

Eine besondere Klasse von Idealen bilden Monomideale in einem Polynomring $R = k[x_1, \dots, x_n]$. Die Monome von R lassen sich als Gitterpunkte in $\mathbb{Q}^n_{\geq 0}$ interpretieren und erlauben so die Anwendung kombinatorischer Methoden. Eine davon wurde von Diane Kahn Taylor in ihrer Dissertation [Tay66] entwickelt und beschreibt eine freie Auflösung eines beliebigen Monomideals in R. Ein zentraler Punkt ist, dass die Syzygien von zwei Monomen x^u und x^v zum Ideal $(\mathrm{KgV}(x^u, x^v))$ isomorph sind. Das KgV lässt sich sehr einfach berechnen: Es ist das Monom mit Exponentenvektor $\max(u, v)$, wobei wir damit das koordinatenweise Maximum der Vektoren u und v meinen.

Da Monomideale homogen sind, auch bezüglich der $\mathbb{Z}^n$-Graduierung auf R, lassen sich viele Invarianten ebenfalls graduiert auffassen bzw. verfeinern. Z.B. kann man für I das multigraduierte Hilbertpolynom berechnen oder multigraduierte Betti-Zahlen. Einige dieser Methoden sind bereits in der SINGULAR-Library `multigrading.lib` implementiert ([DGPS15]).

Das Prinzip

Der Taylor-Auflösung liegt das Inklusions-Exklusions-Prinzip zugrunde. Zuerst überdeckt man das gegebene Ideal mit Hauptidealen. Die Schnitte sind nun mehrfach überdeckt, weshalb wir diese wieder herausschneiden. Nun sind aber Dreifach-Schnitte zu oft herausgeschnitten worden, weshalb wir diese wieder hinzufügen, usw.

Gegeben ein Monomideal $I = (x^{u^0}, \dots, x^{u^m})$, fixiert man einen orientierten Simplex Δ_m mit $m + 1$ Ecken $v^0, \dots, v^m$. Abstrakt gesehen bedeutet das, man fixiert eine Menge $v^0, \dots, v^m$ von $m + 1$ "Ecken," zusammen mit einer Sortierung. "Seiten" davon sind alle Teilmengen. Nun baut man eine Abbildung ev von den Seiten von Δ_m in den Ring R, indem man $ev(v^i) := x^{u^i}$ setzt und für eine beliebige Seite F von Δ_{m-1}

$$ev(F) := \mathrm{KgV}\{ev(v^i) \mid v^i \in F\}$$

definiert. Zusätzlich sei $ev(\emptyset) := 1$.

Beispiel 1 Sei $R = k[x, y]$ der Polynomring in zwei Variablen und I das Monomideal $I = (x^2, \ xy, \ y^2) \subseteq k[x, y]$. Die Monome in I entsprechen dann den Gitterpunkten in der schraffierten Fläche in Abbildung 1.

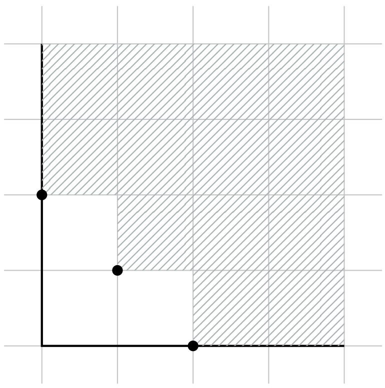

Abbildung 1: *Die Monome in I*

Das Ideal I hat drei Erzeuger, also benötigen wir den zweidimensionalen Simplex Δ_2 (Abbildung 2).

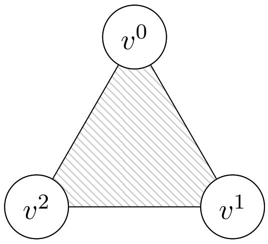

Abbildung 2: Δ_2

Außerdem können wir die Abbildung ev konstruieren:

$$\begin{array}{rcl|rcl} ev(\emptyset) & = & 1 & ev(\{v^0, v^1\}) & = & x^2y \\ ev(\{v^0\}) & = & x^2 & ev(\{v^0, v^2\}) & = & x^2y^2 \\ ev(\{v^1\}) & = & xy & ev(\{v^1, v^2\}) & = & xy^2 \\ ev(\{v^2\}) & = & y^2 & ev(\{v^0, v^1, v^2\}) & = & x^2y^2 \end{array}$$

Als nächstes sei $\Delta_m[k]$ die Menge der k-Seiten von Δ_m, d. h. Seiten mit $k+1$ Ecken, und sei C_k der freie R-Modul

$$\bigoplus_{F \in \Delta_m[k-1]} R$$

mit der kanonischen Basis $\{e^F\}_{F \in \Delta_m[k]}$. Diese Moduln C_k werden später zusammen mit Abbildungen $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$ einen Komplex $C_\bullet$ definieren, der R/I frei auflöst.

Beispiel 2 Wir stellen fest, dass wir eine Auflösung der Form

$$0 \to R \xrightarrow{\partial_2} R^3 \xrightarrow{\partial_1} R^3 \xrightarrow{\partial_0} R \to 0$$

erhalten werden. Allgemein lässt sich zeigen, dass die Dimensionen immer einer Zeile aus dem Pascalschen Dreieck entsprechen.

Zuletzt definieren wir die Abbildungen

$$\partial_k : C_k \to C_{k-1}$$

durch

$$\partial_k(e^F) := \sum_{F' \in \Delta_m[k-1]} c(F, F') \cdot \frac{ev(F)}{ev(F')} \cdot e^{F'},$$

wobei für eine Seite $F = \{w^0, \dots w^k\}$ die Koeffizienten $c(F, F')$ als

$$c(F, F') := \begin{cases} (-1)^i & F = F' \cup w^i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben werden.

Beispiel 3 Die Abbildungsmatrix von ∂_0 ist eine Zeilenmatrix mit den Erzeugern von I:

$$\partial_0 = \begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 \end{pmatrix}.$$

Interessanter ist die Matrix von ∂_1. Für die Seiten $F := \{v^0, v^1\} \supset \{v^0\} = F'$ erhalten wir

$$c(F, F') = -1.$$

Als Bild von e^F erhalten wir dann insgesamt

$$\partial_1(e^F) = -y \cdot e^{\{v^0\}} + x \cdot e^{\{v^1\}}.$$

Mit der Reihenfolge der zweidimensionalen Seiten aus der Tabelle oben ergibt sich folgende Matrix

$$\partial_1 = \begin{pmatrix} -y & -y^2 & 0 \\ x & 0 & -y \\ 0 & x^2 & x \end{pmatrix}.$$

Man erkennt, dass die zweite Spalte der Matrix sich als R-Linearkombination der ersten und letzten Spalte darstellen lässt. Das bedeutet insbesondere, dass unsere Auflösung nicht minimal sein wird. Die letzte Matrix ergibt sich als

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} y \\ -1 \\ x \end{pmatrix}.$$

Zelluläre Auflösungen

Anstatt den gesamten Simplex Δ_{m-1} zu benutzen, kann man das vorgestellte Prinzip auf einen simplizialen Teilkomplex von Δ_{m-1} anwenden. Dies sind die sogenannten "cellular complexes" von Bayer und Sturmfels. Eine gute Einführung findet man in [MS05].

Während die Taylor-Auflösung immer exakt ist, ist das für zelluläre Komplexe nicht mehr der Fall. Betrachtet man im oben diskutierten Beispiel den Komplex, der zu Abbildung 3 gehört, so erhält man genau die minimale Auflösung von I. Wählt man allerdings Abbildung 4, so erhält man einen Komplex, der nicht mehr exakt ist.

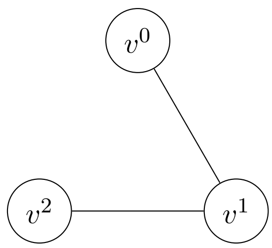

Abbildung 3: *Minimale Auflösung von I*

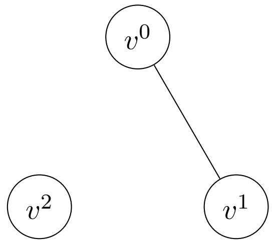

Abbildung 4: *Keine Auflösung von I*

In ihrem Artikel [BS98] geben Bayer und Sturmfels Kriterien an, wann ein zellulärer Komplex eine Auflösung ist. Außerdem leiten sie eine Bedingung her, wann eine zelluläre Auflösung minimal ist.

Verallgemeinerung für zyklische Quotientensingularitäten

Im Polynomring ist das KgV von Monomen $\{m_i\}_{i=1,\dots,r}$ der eindeutige Erzeuger des Ideals

$$\bigcap_{i=1}^{r}(m_i) = (\mathrm{KgV}(m_i \mid i = 1, \dots, r).$$

Wenn wir ev als

$$ev(F) := \bigcap_{i=1}^{r}(m_i)$$

definieren und C_k als direkte Summe der $ev(F)$ für alle k-Seiten F, so besteht die Abbildung ∂_k aus der Summe der natürlichen Inklusionen $ev(F) \subseteq ev(F')$ für $F' \subseteq F$, versehen mit den Vorzeichen $c(F, F')$.

Dies erlaubt die Verallgemeinerung der Konstruktion auf torische Ringe, also Ringe der Form $\mathbb{C}[\sigma \cap \mathbb{Z}^n]$, wobei $\sigma \subseteq \mathbb{Q}^n$ ein polyedrischer Kegel ist: Die Abbildung ev bleibt als Schnitt von Idealen definiert und das KgV ist nicht mehr nötig. Da es in torischen Ringen kein eindeutiges KgV geben muss, kann es passieren, dass C_k nicht mehr frei ist. Der Modul C_1 ist jedoch immer frei, was sich ausnutzen lässt, indem man wiederholt die Taylor-Auflösung der nicht freien direkten Summanden bildet und diese dadurch substituiert. Im Allgemeinen ist die freie Auflösung eines Monomideals in einem torischen Ring nicht endlich, trotzdem bekommen wir so einen endlichen Teil beliebiger Länge.

Zyklische Quotientensingularitäten sind das Spektrum von Ringen der Form

$$R := \mathbb{C}[x^a, y^b \mid a \geq 0, -q \cdot a + n \cdot b \geq 0]$$

für zwei teilerfremde ganze Zahlen $0 < q < n$. Insbesondere ist R ein torischer Ring. Zu jedem Monomideal I in R gibt es einen zellulären Komplex der Form

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{r} I_i \hookrightarrow R^{r+1} \twoheadrightarrow I \to 0,$$

wobei diese Sequenz exakt ist, r die minimale Anzahl an Erzeugern von I ist, und die I_i andere Monomideale sind ([Kas16]). Dies erlaubt eine rekursive Berechnung der Funktoren Ext^i und Tor_i, und eine kombinatorische Formel für Ext^1 und Tor_1. Wendet man die so gewonnen Formeln und die lange exakte Kohomologiesequenz auf obige Sequenz an, so ergeben sich für zwei Divisoren D und D' auf einer zyklischen Quotientensingularität X die Beziehungen

$$\underset{X}{\overset{1}{\mathrm{Ext}}}(D, K - D') = \underset{X}{\overset{1}{\mathrm{Ext}}}(D', K - D) \quad \text{und}$$

$$\underset{X}{\overset{i+2}{\mathrm{Ext}}}(D, K - D') = (\underset{i}{\mathrm{Tor}}(D, D'))^\vee, \ i > 0,$$

wobei K der kanonische Divisor auf X ist und $(\bullet)^\vee$ das Matlis-Dual.

Ausblick

Eine eng verwandte Konstruktion sind injektive Auflösungen von Monomidealen. Im einführenden Beispiel gibt es vier graduierte Moduln, aus denen sich alle anderen graduierten injektiven Moduln konstruieren lassen. Das sind

$$k\{\mathbb{Z}^2\},\ k\{x^a y^b \mid a \leq 0\}$$
$$k\{x^a y^b \mid b \leq 0\},\ k\{x^a y^b \mid a \leq 0,\ b \leq 0\},$$

d. h., zum Beispiel enthält $k\{x^a y^b \mid a \leq 0\}$ alle Monome mit negativem x-Exponenten (s. [MS05]). Dabei ist die Multiplikation eines $x^a y^b \in k\{x^a y^b \mid a \leq 0\}$ mit $x^{a_0} y^{b_0} \in R$ gegeben als

$$x^{a_0} y^{b_0} \cdot x^a y^b = \begin{cases} x^{a+a_0} y^{b+b_0} & a + a_0 \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Diese R-Moduln sind nicht mehr endlich erzeugt, aber kombinatorisch sehr einfach zu handhaben. Mit dem Inklusions-Exklusions-Prinzip der Taylor-Auflösung lässt sich mit diesen Bausteinen auch eine injektive Auflösung von I konstruieren. Die Länge dieser Auflösung hängt in diesem Fall nur von der Anzahl der "Ecken" ab, die die Monome in I bilden, siehe Abbildung 1.

Auch die kombinatorische Beschreibung von injektiven Moduln lässt eine Verallgemeinerung für Halbgruppenringe der Form $k[\sigma \cap \mathbb{Z}^d]$ zu. Somit lassen sich sowohl projektive als auch injektive Auflösungen komplett kombinatorisch schreiben. Dies auszunutzen ist Ziel der Schnittstellen zwischen SINGULAR und `polymake` ([GJ00]).

Literatur

[BS98] Dave Bayer, Bernd Sturmfels, *Cellular resolutions of monomial modules.*, J. Reine Angew. Math. **502** (1998), 123–140 (English).

[DGPS15] Wolfram Decker, Gert-Martin Greuel, Gerhard Pfister, Hans Schönemann, SINGULAR *4-0-2 — A computer algebra system for polynomial computations*, `http://www.singular.uni-kl.de`, 2015.

[GJ00] Ewgenij Gawrilow, Michael Joswig, *polymake: a framework for analyzing convex polytopes*, Polytopes — Combinatorics and Computation (Gil Kalai and Günter M. Ziegler, eds.), Birkhäuser, 2000, pp. 43–74.

[Kas16] Lars Kastner, *Ext and tor on two-dimensional cyclic quotient singularities*, preprint (2016), `http://arxiv.org/abs/1601.05673`.

[MS05] Ezra Miller, Bernd Sturmfels, *Combinatorial commutative algebra.*, New York, NY: Springer, 2005 (English).

[Tay66] Diana Kahn Taylor, *Ideals generated by monomials in an r-sequence*, Ph.D. thesis, University of Chicago, Department of Mathematics, 1966.