

MATH 42 für iPhone und iPad

ein Vorschlags- und Zwischenschritt basiertes,
symbolisches Algebra System für Schüler der 5. bis 12. Klasse

Thomas Nitsche, Maxim Nitsche, Oxana Nitsche, Raphael Nitsche, Markus Sähn

Thomas Nitsche
Mommensenstrasse 67, 10629 Berlin
thomas.nitsche@cogeon.com

Abstract: MATH 42¹, ein symbolisches Algebrasystem, läuft auf iPhones und iPads und richtet sich an Schüler der 5. bis 12. Klasse. MATH 42 macht Vorschläge, wie eine Aufgabe zu lösen ist und zeigt Lösungswege in nachvollziehbaren, ein- und ausblendbaren hierarchischen Schritten je nach Wissensstand eines Schülers an.

MATH 42 testet den erreichten Wissensstand, zeigt Fortschritte an und rechnet Übungsaufgaben vor. MATH 42 kann für (elektronische) Schulbücher und Portale als Lösungsservice agieren.

1 Problem

Der Markt für symbolische Computer Algebra Systeme (CAS) ist sehr überschaubar². Es gibt nur wenige CAS Systeme speziell für Schüler. Kein System verzichtet bei der Eingabe auf eine proprietäre Syntax der Art 'solve $((x+1)/x=x;x)$ ' oder 'simplify $(6a/8ab)$ '.

Nur 4 Systeme³ bieten Zwischenschritte an. Es scheint, daß diese nachträglich einem bestehenden System als fixe Lösungsschablonen aufgesetzt wurden⁴. Meist sind die Systeme auf einen Backend Service angewiesen und/oder laufen nicht auf Mobile Devices⁵.

Die am Markt erhältlichen CAS Taschenrechner⁶ lösen das Problem der Nachvollziehbarkeit nicht.

¹ Informationen zu MATH 42 unter: www.smath.com

² Es gibt z.Z. weniger als 20 verfügbare originäre CAS Systeme [LCAa] und [LCAb], von denen axiom, Maxima und SAGE als Open Source verfügbar sind. Daneben gibt es eine Reihe von Geometrie Systemen [3], von denen GeoGebra, GEONEXT und Zirkel und Lineal als Open Source verfügbar sind. Als Taschenrechner gibt es Versionen von Texas Instruments, Casio und HP. Die verfügbaren CAS Apps für iOS, wie etwa Symbolic Calculator etc. basieren auf verfügbarer Open Source Software.

³ Wolfram Alpha [SBSc], Mathway (Begatrix) und FX Math Solver [SBSa], Microsoft Mathematics 4.0 [SBSb]

⁴ Wolfram Alpha etwa basiert auf Mathematica. Es ist z.B. in der Lage genau vorzurechnen, wie $6/8$ zu kürzen ist. Kommt dagegen $6/8$ innerhalb eines größeren Ausdrucks vor, so werden keine Zwischenschritte angeboten.

⁵ Wolfram Alpha greift auf Mathematica zurück (s.o.) und Microsoft Mathematics ist PC basiert

⁶ Texas Instruments TI nSpire, Casio Taschenrechner

Gedanken zur Mathematik

Symbolische Mathematik Systeme, besonders übliche CAS Rechner lassen uns Mathematik mit dem Produzieren von Lösungen verwechseln. Der genaue, nachvollziehbare Weg von einem Ausgangspunkt, in Form einer Hypothese oder einer Gleichung hin zur Lösung in Schritten und Teilschritten - auch Beweis genannt - wird nicht gezeigt. Der Eindruck, daß durch den immer weiteren Einsatz von rein Lösungs-orientierten CAS Taschenrechnern ein wesentliches Verständnis von Mathematik herbeigeführt werden kann, halten die Autoren für falsch. Auch die vertretene Ansicht, daß man die 'niederen' Dinge getrost Computern überlassen könne und Mathematik sich auf einer anderen Ebene, nämlich dem Verstehen im Großen abspiele, mag teilweise richtig sein, geht aber aus Sicht der Autoren an der Sache vorbei.

Entstehung von MATH 42

Nachdem die Autoren Erfahrungen im Bereich der Schulischen Nachhilfe haben, wurde diskutiert, inwieweit man Abhilfe schaffen könnte '... es müßte ein Programm geben, welches Schülern Mathematik Aufgaben Schritt für Schritt vorrechnet und möglichst überall verfügbar sein sollte'.

Da im Entwicklerteam Schüler (französisches und deutsche Schulsystem) direkt vertreten sind, ist der Draht in die Schule kurz und die Probleme sind bekannt.

Ziel bei der mathematischen Funktionalität waren nicht Lehrpläne, sondern mathematische Stoffgebiete, die sich im Gegensatz zu Lehrplänen nicht von Land zu Land oder von 'district to district' unterscheiden. Es gibt keine 'chinesische Ableitung von Funktionen' oder eine 'französische Bruchrechnung', sondern nur eine Mathematik. Es gibt sicherlich eine unterschiedliche Didaktik und manchmal eine leicht unterschiedliche Schreibweise, aber die zugrunde liegenden mathematischen Konzepte sind über die Systeme hinweg gleich.

2 Ziele und Kriterien

Um Akzeptanz bei Schülern zu erreichen, sollte MATH 42 folgende Kriterien erfüllen:

- **'Überall' Verfügbarkeit**
MATH 42 sollte überall dort funktionieren, wo Schüler sich bewegen: in der Schule, im Pausenhof, im Schulbus, im Cafe, bei Freunden und zu Hause.
- **'Sofort' Verfügbarkeit**
MATH 42 sollte sofort (≤ 1 Sek.) und ohne 'Hochlaufzeiten' verfügbar sein, ähnlich wie ein Taschenrechner: Einschalten und losrechnen.
- **Hohe Usability**
MATH 42 sollte möglichst intuitiv benutzbar sein. Texteingaben sollten auf die Eingabe von mathematischen Formeln begrenzt sein. Alles weitere sollte durch einfache

Touches gesteuert werden. Letztere Forderung beinhaltet den Verzicht auf die sonst übliche proprietäre Syntax und andere Texteingaben (s.u.). Das 'Gewünschte' sollte sofort und intuitiv durch ein Darauf-Zeigen (per Touch) benennbar sein.

- **Hohe Leistungsfähigkeit**

Symbolische Mathematik kombiniert mit 'on-the-fly' Vorschlägen⁷ und Schritt für Schritt Lösungen verlangt eine hoher Rechenleistung (s.u.), um Vorschläge und Antworten schnell⁸ zu geben. Ein in Objective C geschriebenes Programm läuft auf einem iPad oder iPhone inzwischen nicht langsamer als das entsprechende Programm in Java auf einem Notebook. Was die Graphik anbelangt, performt iOS sogar besser⁹.

- **Unabhängigkeit vom Internet**

MATH 42 sollte Offline und ohne mathematisches Backend¹⁰ voll funktionsfähig sein.

	'Überall' Verfügbarkeit	'Sofort' Verfügbarkeit	Usability	Leistungsfähigkeit	Offline Funktionalität
Smartphone, Tablet	+	+	=	=	/
Desktop Computer	--	--	--	+	/
Laptop	=	--	--	+=	/
Internet Service	-	=	--	=	-

Abbildung 1: Bewertung Von Plattformen (Smartphones ...) bezüglich der zu erreichenden Ziele (Verfügbarkeit ...). '+': gute, '=': neutrale, '-' bzw '- -': schlechte bzw. sehr schlechte Zielerfüllung

Entscheidung für iOS

Die Entscheidung für eine der großen neuen Mobilplattformen (iOS, Android, Windows) ist bekanntermaßen emotional stark aufgeladen. Aus Sicht der Autoren war neben vielen anderen das folgende Kriterium entscheidend: iOS hat eine deutlich homogenere Zielplattform und es ist 'leichter' für iOS zu entwickeln - siehe [BBC Trust - Android Findings, S. 2]: "... developing for Android brought greater complexity and expense, ..." ¹¹.

⁷ On-the-fly meint, daß mit jeder Benutzereingabe und jeder Termumformung sofort neue Vorschläge ermittelt werden. Mit der Eingabe bzw. dem Entstehen von z.B. ' $x^2 + 9 - 6x$ ' als Teilterm auch innerhalb eines größeren Termbaumes muß unter Beachtung der Kommutativität die binomische Zerlegung ad hoc erkannt werden.

⁸ Vorschläge, wie eine Aufgabe gelöst werden kann, werden in 'Echtzeit' (< 0.1 Sek.) erstellt. Die Lösung einer üblichen quadratischen Gleichung (z.B. ' $(x+1)/x = x$ ') wird in etwa 1 Sek. geliefert und das Plotten inkl. Kurvendiskussion einer komplizierteren Funktion (z.B. ' $(x^3 - 1)/(x^3 - x^2 + x - 3)$ ') benötigt ca. 4 Sek. - u.a. müssen dafür die 3. Ableitung und diverse Nullstellen inkl. aller Zwischenschritte etc. berechnet werden.

⁹ Raphael Nitsche - LifeGame und Planetensimulation im Vergleich: unter Java auf einem Notebook bzw. unter Objective C auf einem iPad

¹⁰ Wolfram Alpha ist ein reines Frontend zu Mathematica, auf das es per Internet Verbindung zurückgreift.

¹¹ http://downloads.bbc.co.uk/bbctrust/assets/files/pdf/appeals/cab/Apr_2013.pdf

3 Ziele für ein neuartiges symbolisches Mathematik System

- **Möglichst viel Intelligenz im 'Kleinen'**

MATH 42 sollte fehlertolerant mit Eingaben umgehen. Wenn etwa eine Klammer bei der Eingabe vergessen wird, sollte diese so ergänzt werden, daß immer ein mathematisch sinnvoller / auswertbarer Ausdruck entsteht. Multiplikationszeichen sollen nach Möglichkeit wegläßbar sein etc.

- **Aufgezeigte Lösungen sollten bis zum kleinsten Schritt nachvollziehbar sein**

Die Verifizierbarkeit eines Ergebnisses ist nicht nur aus mathematischer Sicht sinnvoll - kann man einem Ergebnis trauen? Ein nachvollziehbarer Lösungsweg ist auch in der Schule unverzichtbar, da nur dieser zeigt, daß ein Ergebnis aus den richtigen Gründen zustande gekommen ist.

- **Hierarchisch aufgebaute, ein- und ausblendbare Zwischenschritte**

Je nach Kenntnisstand sollten Zwischenschritte hierarchisch aufgebaut und ein- bzw. ausblendbar sein. Bei Schülern der 6. Klasse etwa wird die Nachvollziehbarkeit einer Bruchrechnung verlangt, während in einer höheren Klasse bei einer Ableitungsaufgabe ein zu vereinfachender Bruch nicht in allen Details nachzurechnen ist.

- **Vollständiger Verzicht auf eine spezielle Eingabesyntax**

Eingaben der Art 'solve(... ;x)' sollten nicht mehr benötigt werden. MATH 42 sollte selbständig erkennen, welche Umformungen oder Berechnungen sinnvoll auf einen Ausdruck anwendbar sind. Bei mehreren Möglichkeiten einen Term umzuformen, sollten sie als Alternativen aufgezeigt und priorisiert werden.

- **Mathematisch sauber gesetzte Formeln**

Die Formeldarstellung sollte möglichst nahe an LaTeX heranreichen.

4 Konzeptueller Mehrwert, Nutzen für den Schüler

Der Nutzen für Schüler ergibt sich in 2 unterschiedlichen Szenarien: (A) beim Einsatz während des Unterrichts in Kooperation mit der Schule und (B) beim Einsatz nach dem Unterricht, meist zuhause.

Einsatz in Szenario (A) - In der Schule

Der heutige Mathematik Frontalunterricht¹² ist gekennzeichnet durch Lehrer, die mathematische Sachverhalte erklären, Lösungsstrategien aufzeigen, Beispielaufgaben Schritt für Schritt vorrechnen und gelegentlich, falls es die Zeit zuläßt, Probleme auf Nachfrage erläutern.

¹² Auch wenn viele Schulen bereits Schritte unternehmen, den Frontalunterricht aufzuweichen, ist er doch nicht abgeschafft

Im Prinzip macht MATH 42 nichts anderes - mit dem Unterschied, daß der einzelne Schüler individuell das Tempo vorgeben kann und damit nicht 'abgehängt' wird - er kann größere oder feinere Schritte einblenden und jeden Schritt genauer inspizieren - individuell nach Wissensstand und Können.

Einsatz in Szenario (B) - Zuhause

Hat ein Schüler in der Schule noch die Möglichkeit nachzufragen, ist ihm dies bei den Hausaufgaben verwehrt.

Es bleiben ihm bei für ihn nicht lösbaren Aufgaben die folgenden Optionen (1) Er wartet bis zum nächsten Tag, zieht sich eine schlechte Note zu und bekommt nur eventuell seine Fragen beantwortet (2) Er greift auf teure Nachhilfe zurück (3) Er fragt bei guten Schülern nach bzw. schreibt dort ab (4) Er erhält in seltenen Fällen Hilfe von den Eltern.

Im Gegensatz zur Verwendung von MATH 42 als Hausaufgabenhilfe sind all diese Optionen suboptimal, da entweder teuer, oft nicht verfügbar oder zu schlechten Noten führend.

MATH 42 als 'Cheater' App

Es wird eingewendet, daß MATH 42 'cheaten' unterstützt, was aus Sicht der Autoren die schulische Wirklichkeit unterschlägt: ca. 20% der Siebt- bis Zehntklässler erhalten Mathematik-Nachhilfe¹³ und ein großer Teil schreibt die Hausaufgaben schlicht ab.

Sicherlich kann auch mit MATH 42 'abgeschrieben' werden, doch all die Möglichkeiten, Aufgaben in verschiedenen Alternativen bzw. Schritt für Schritt mit Erklärungen zu lösen, sollte den einen oder anderen zurück in das Mathematik-Verständnis-Boot holen.

Erfahrungen im praktischen Einsatz

Aktuell (Ende Juni 2013) ist MATH 42 weder käuflich¹⁴ noch in einer repräsentativen Teststellung an einer Schule vertreten. Es liegen insofern keine Ergebnisse aus dem Bereich der 'Lernforschung' vor.

Einerseits sind die bisherigen Tests mit Schülern, Eltern und Lehrern rein anekdotisch, andererseits ist die Rückmeldung bisher eindeutig "... endlich etwas, das wirklich hilft". Insbesondere von Lehrern kam eine positive Rückmeldung, da sich das häufig geäußerte "... taugt das nicht nur zum Abschreiben?" mit dem ersten 'Hands On' relativiert hat.

¹³ Bertelsmann Studie: http://www.bmbf.de/pubRD/sachstand_nachhilfe.pdf

¹⁴ MATH 42 wurde am 29.6.13 in den Apple AppStore eingereicht und wird aktuell 'reviewed' - es wird für 4,49 Euro erhältlich sein, ohne weitere Zusatzkosten (keine in-App-Käufe etc.)

5 Mehrwert gegenüber anderen Systemen

Der Mehrwert zu anderen Systemen besteht nicht nur aus den folgenden Einzelfunktionen, sondern aus deren Kombination¹⁵:

- Es muß keine über die Bedienung eines herkömmlichen Taschenrechners hinausgehende Syntax gelernt und verwendet werden.
- Im Gegensatz zu anderen Systemen macht MATH 42 Vorschläge, wie eine Aufgabe zu lösen ist und zeigt alternative Lösungswege auf. Dies unterstützt Schüler in verschiedenen Schulsystemen mit unterschiedlichen Lehrern und unterschiedlichen geforderten Lösungswegen.
- Kein anderes CAS System bietet die Schritt für Schritt Lösungen von MATH 42 an, welche Schüler individuell unterstützen.
- MATH 42 verwendet bei der Erzeugung der Schritt für Schritt Lösungen keine Schablonen, die etwa nur Polynomdivisionen bis etwa zum (willkürlichen) Grad 5 lösen können, da die Schablone höhere Grade nicht mehr abbilden kann.
- Durch sein implizites Klassifikationsystem (s.u.) kann MATH 42 Erkenntnisse über die Stärken und Schwächen - per adaptiv lernender Schülerbeobachtung - gewinnen und in seinem Testmodus zum Vorteil des Schülers einsetzen.

6 User Workflow Design

Der User Workflow vollzieht sich in 2 Hauptschritten [Abb.2]:

- **Eingabe einer Aufgabe**
MATH 42 erzeugt 'on-the-fly' Vorschläge, wie eine Aufgabe gelöst werden kann. Da MATH 42 nur mathematisch Sinnvolles bei der Eingabe zuläßt, können Vorschläge immer erzeugt werden. Wird z.B. ein Operator eingegeben, wird er nach rechts durch ein Wildcard ergänzt. Dieses wird mit den nächsten Eingaben sinnvoll (Zahl, Variable, Subterm) gefüllt. Ungefüllte Wildcards werden wie Parameter behandelt.
- **Wahl einer Action, etwa 'Gleichung lösen'**
MATH 42 führt die Action aus und zeigt das Ergebnis mit Zwischenschritten an.

Anschließend können weitere Vorschläge ausgeführt werden, Schritte ein- und ausgeblendet, Actions zurückgenommen oder andere Aktionen (Kurve plotten, Aufgabe + Lösung verschicken, ...) ausgeführt werden.

¹⁵ Die einfache Eingabe mit alternativen Vorschlägen zur Lösung einer Aufgabe bis hin zu den hierarchisch gegliederten Lösungsschritten stellt aus Sicht der Autoren nur in dieser Kombination einen echten Nachhilfersatz dar.

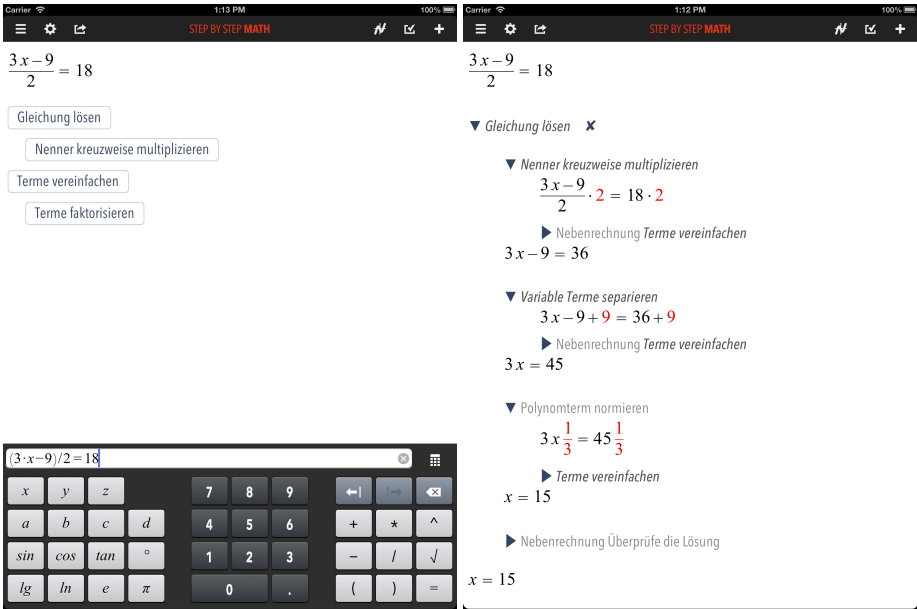


Abbildung 2: Links: Eingabe mit Lösungsvorschlägen - Rechts: Schritt für Schritt Lösung mit teilweise eingblendeten Teilschritten

7 Core Engine

Terme

Im Zentrum von MATH 42 steht der 'Term', über den jeder statische mathematische Sachverhalt dargestellt wird. Hierzu zählen einfache Ausdrücke, Gleichungen, Abfolgen von Einzeltermen, Gleichungssysteme und Parameterdefinitionen etc.

Terme (a , $x + 2b$, etc.) sind baumartig zusammengesetzte Strukturen. Ein einzelner Term ist entweder ein Blatt (Variable, Zahl), oder setzt sich aus einem oder mehreren anderen Termen (Summe, Produkt, ...) zusammen. Jeder Term hängt in genau einem anderen Term. Terme werden vor einer weiteren Verwendung kopiert. Die Einhaltung der Baumstruktur wird durch entsprechende Zugriffsmethoden unterstützt.

Die Vermeidung von Ringstrukturen in Verbindung mit dem durch Apple in iOS seit einiger Zeit eingeführten ARC (Automatic Reference Counting) und der Umstellung von MATH 42 darauf¹⁶ hat zu einem stabilen System geführt. Speicherlöcher oder ein problematisches Laufzeitverhalten wie bei Garbage Collection unter Java treten nicht mehr auf.

Terme haben Eigenschaften, wovon einige gleich von Beginn an existieren, andere nur

¹⁶ Die Umstellung kann mit Hilfe der von Apple gelieferten Tools größtenteils automatisch durchgeführt werden. MATH 42 wurde in seiner Speicherverwaltung innerhalb eines Tages umgestellt und es traten keine Probleme auf.

temporär (Flags für das Ausmultiplizieren) und andere nur wenn sie benötigt werden ('ist Polynom'). Wo möglich, wurde auf Lazy-Initialisierung zurückgegriffen. Terme führen mit, ob sie numerisch sinnvoll auswertbar sind (2^4 im Gegensatz zu 2^{3353}), ob sie prinzipiell auswertbar sind, also nur von einer Variablen und nicht etwa von noch undefinierten Parametern abhängen oder ob sie etwa im Reellen keine Lösung besitzen (z.B. $\sqrt{-5}$).

Typische Basis-Operationen sind 'Sind Term A und B gleich' oder 'Überführe den Term in eine interne Normalform'¹⁷ etc.

Regeln

Zum Kern eines jeden CAS Systems gehören Umformungs- und algorithmische Regeln, jeweils bestehend aus:

- Einer 'Condition', die beschreibt, wann und in welchem Kontext eine Regel anwendbar ist. Der Kontext wird bei jedem Aufruf neu bestimmt, da er sich während einer Abfolge von Schritten ändert.
- Einer 'Action'¹⁸, die festlegt, wie sich ein Term ändert, bzw. was für ein neuer Term erzeugt wird. Jede Action erhält als Eingabeparameter einen Step (s.u.), in dem der Ablauf der Action notiert wird.

Formt eine Regel einen Term um, so wird er nach der Durchführung durch das Ergebnis ersetzt. Bildet eine Regel einen Algorithmus ab, so wird ein neuer Term (GGT, KGV, ...) erzeugt, der neben dem Ausgangsterm weiterverwendet werden kann.

Die in MATH 42 verwendeten Regeln sind baumartig aufgebaut. 'Term vereinfachen' baut u.a. auf 'Vorzeichen vereinfachen' und 'geschachtelte gleichartige Terme auflösen' auf - die letztere Regel wiederum auf z.B. 'geschachtelte Brüche vereinfachen' oder 'Produkte und Brüche zusammenfassen'.

Steps

Steps sind Aufzeichnungsobjekte, in denen zumindest der Ausgangs- und Ergebnisterm einer Action vermerkt sind. Kommt ein Ergebnisterm auf nichttriviale Weise zustande, etwa ein gekürzter Bruch, so werden zwischen Ausgangs- und Ergebnisterm die Zwischenschritte vermerkt. Als Zwischenschritte sind Terme, Texte, Teilschritte oder Nebenrechnungen zugelassen. Jeder Teilschritt kann wieder beliebig viele Teilschritte enthalten. Actions bestimmen, welche Teilschritte als trivial und welche als nichttrivial anzusehen sind und damit aufgenommen werden. Wird eine Formel als erklärender Zwischenschritt aufgenommen, so können Teile rot markiert werden, um den Schritt didaktisch besser zu erläutern. Steps sind ein- und ausblendbar.

¹⁷ Nach 'außen' gibt es Brüche, Produkte, Potenzen oder Wurzeln. Andererseits können diese Termtypen über ein einheitliches Produkt von Potenzen behandelt werden.

¹⁸ Der Aufbau von Regeln aus Conditions und Actions ähnelt CDL 2, in dem etwa der Mephisto III (Thomas Nitsche und Elmar Henne) entwickelt wurde

Vorschläge

Die Vorschlags Komponente prüft mit Hilfe der Regel Conditions, welche Actions auf einen Term oder seine Teilterme ausführbar sind. Sie sammelt alle Vorschläge, bringt sie in eine Ordnung und präsentiert sie strukturiert. Die Reihenfolge mit der eine Regel untergeordnete Regeln ausführt, orientiert sich an der vorgegebenen Priorität (s.u. Strategie).

Regel Engine

Ist eine Auswahl getroffen, so setzt die Regel Engine den Vorschlag um. Der zu bearbeitende Term wird rekursiv durchgegangen und der gewählte Regel Baum wird wiederum rekursiv auf die Teilterme angewendet.

Auf den ersten Blick führt dieses Vorgehen bei z.B. der Term Vereinfachung nicht zu einem klaren Ergebnis. Man stelle sich vor, daß sich innerhalb der Regel 'Terme vereinfachen' sowohl die Regeln 'Terme ausmultiplizieren' und 'Terme faktorisieren' mit wiederum der Unterregel 'Term binomisch zerlegen' befinden. Hat man etwa auf den Term $(x+1) \cdot (x-1)$ das Ausmultiplizieren angewandt und $x^2 - 1$ erhalten, so führt die Regel 'binomisch zerlegen' den letzten Ergebnisterm in seine Faktoren, also den Ausgangsterm zurück usw. Anmerkenswert ist, daß der durchlaufene Aufrufbaum von anzuwendenden Regeln, Termen und Teiltermen schon bei kleineren Problemen eine erhebliche Komplexität erreicht und kaum durch einfaches Debuggen zu durchschauen ist.

Umformungs- und Lösungsstrategien

Um Schleifen zu verhindern und die Anwendung von Regeln nicht nur effektiv, sondern auch effizient (möglichst wenige Regeln anwenden) zu gestalten, bedarf es einer Strategie. Diese wird sowohl durch die Anlage der Regeln (Auswahl und Priorisierung), als auch durch den Kontext definiert. Bei der normalen Termumformung etwa werden Brüche nach Möglichkeit addiert (zusammengefaßt). In einer Gleichungsaufgabe dagegen wird man 2 Brüche, von denen nur einer die Variable enthält, nicht addieren, sondern sie auf die verschiedenen Seiten der Gleichung separieren.

8 Klassifikation

Jeder Term wird automatisch und mehrstufig in Bezug auf mögliche Kontexte¹⁹ klassifiziert. Die Klassifizierung geschieht nicht Muster basiert²⁰, sondern semantisch auf Basis

¹⁹ Ein Kontext beschreibt in MATH 42 ein Ziel innerhalb dessen z.B. Umformungen oder Algorithmen durchgeführt werden. Ist z.B. der Kontext 'Ableiten' festgelegt, so werden Termvereinfachungen nach einer Ableitung durchgeführt. Sie erscheinen aber nicht als Klassifikationsmerkmale innerhalb des Kontextes 'Ableiten'.

²⁰ Z.B. können auftretende n-Grams einen Text klassifizieren, was wiederum im mathematischen Umfeld nur bedingt Sinn machen würde.

der möglichen Vorschläge wie eine Aufgabe zu lösen ist. Die Klassifikation verläuft 2-stufig:

- Stufe 1: Ein Term wird durch die direkt anwendbaren Actions klassifiziert.
- Stufe 2: Alle Folge Actions werden einbezogen und die Klassifikation wird entsprechend erweitert.

Beispiel: Betrachtet man $(x^2 - 1)/(x - 1)$ so ist bei einer Vereinfachung nur die 'binomische' Zerlegung des Zählers in $(x + 1) \cdot (x - 1)$ möglich. Erst danach wird erkannt, daß der Bruch gekürzt werden kann. Jede Teilumformung ist entsprechend ihres Schwierigkeitsgrades bewertet²¹. Das Maximum der Schwierigkeitsgrade der in einem Kontext ('Vereinfachen', 'Funktion ableiten', 'Gleichung lösen', ...) zu durchlaufenden Schritte bestimmt den Gesamt-Schwierigkeitsgrad ('grade') und wird als weiteres Klassifikationsmerkmal benutzt.

```
<test >
  <term >(x^2-1)/(x-1)--1970812 </term >
  ...
  <grade >8</grade >
  <topics >
    <topic >TEST.NORM.BINOM</topic >
    <topic >TEST.FRAC</topic >
    <topic >TEST.NORM</topic >
  </topics >
  <results ></results >
</test >
```

Mit der Klassifikation lassen sich sowohl zu einer vorgegebenen Aufgabe ähnliche, als auch zu einem Stoffgebiet passende Aufgaben zusammenstellen.

9 Aktueller mathematischer Umfang

Termumformung

- Vereinfachen von Vorzeichen
- Zusammenfassen von gleichartigen Termen
- Ausmultiplizieren
- Faktorisieren / binomische Zerlegung
- Bruchrechnen (addieren, kürzen etc.)
- Umformung von logarithmischen und trigonometrischen Termen etc.

²¹ Der Schwierigkeitsgrad entspricht ungefähr der Klassenstufe, in der das zugrundeliegende Verfahren gelehrt wird. Es ist den Autoren bewußt, daß von Bundesland zu Bundesland, von Staat zu Staat und von County zu County eine erhebliche Bandbreite existiert.

Lösen von Gleichungen

- Lösen linearer Gleichungen
- Lösen quadratischer Gleichungen
- Bestimmen von Nullstellen teilzerlegter Polynome

Implementierte Algorithmen

- Polynomdivision
- Ableitung von Funktionen
- Primfaktorzerlegung, Berechnung von GGT und KGV etc.
- Algorithmen zur schnellen und stabilen numerischen Nullstellenberechnung beliebiger Funktionen (im Hintergrund).

10 Test Modus

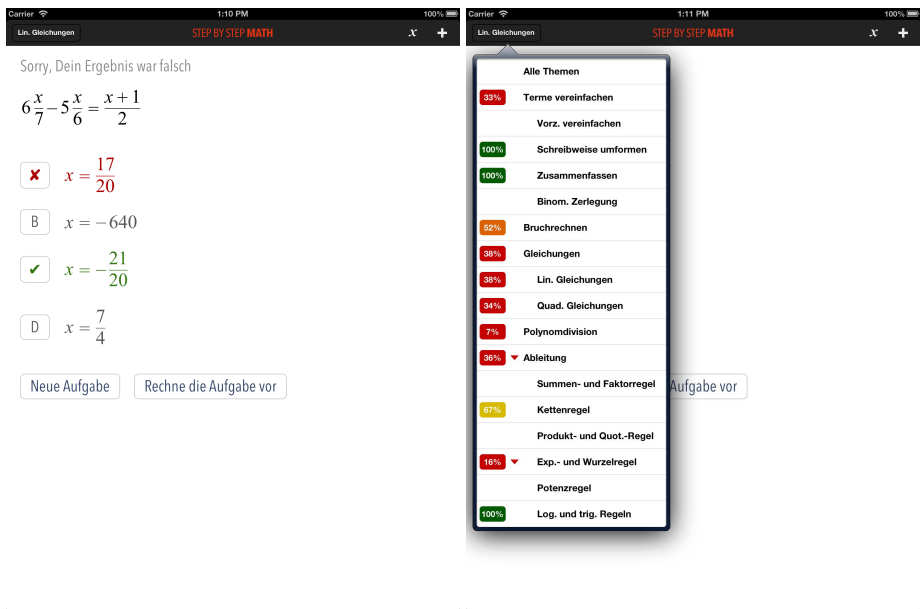


Abbildung 3: Links: Test Modus - Rechts: Test Topics mit erzielter Lösungsrate und Trend

MATH 42 besitzt einen eingebauten Test Modus [Abb.3], der zu den verschiedenen Themengebieten einfache bis schwere Aufgaben enthält und Schüler per Multiple Choice testet. Jede Aufgabe kann in ihren Zwischenschritten vorgerechnet werden. Je Aufgabengebiet wird der Lösungsprozentsatz und der Fortschritt über die Zeit ermittelt.

11 MATH 42 als Service

Durch sein API kann MATH 42 für andere Apps, (elektronische) Schulbücher und Portale als Service dienen, indem es Formeln per API übernimmt und step-by-step Lösungen zurückgibt bzw. verfügbar macht. Um zu vermeiden, daß nicht autorisierte Dritte MATH 42 verwenden, muß jede übernommene Aufgabe durch einen Hash signiert sein.

12 Beispiel - Action 'Kürzen'

The image shows two side-by-side screenshots of a mobile application interface for solving math problems. Both screens display the fraction $\frac{6a^3b}{8ab}$ at the top.

Left Screenshot: The action is 'Gleichartige Terme zusammenfassen'. It shows the steps:

- Initial fraction: $\frac{6a^3b}{8ab}$
- Step 1: 'Nebenrechnung Gleichartige Terme zusammenfassen' shows $\frac{6a^2b}{8b}$ and $\frac{6a^2b^{1-1}}{8}$.
- Step 2: 'Terme vereinfachen' shows the final result $\frac{6a^2b^0}{8}$.

Right Screenshot: The action is 'Brüche kürzen'. It shows the steps:

- Initial fraction: $\frac{6a^3b}{8ab}$
- Step 1: 'Nebenrechnung Größten gemeinsamen Teiler (GGT) berechnen' shows $6a^3b, 8ab \rightarrow 2ab$ (labeled A).
- Step 2: Shows the fraction $\frac{2ab \cdot 3a^2}{2ab \cdot 4}$ (labeled B).
- Step 3: Shows the final simplified fraction $\frac{3a^2}{4}$ (labeled C).

Abbildung 4: Links: Zähler und Nenner Terme zusammenfassen - Rechts: Bruch kürzen

```

- (Term *) actionFracReduce: (Step *) step {
  Step * subStep;
  // Erzeuge eine Nebenrechnung
  if (step != nil) {
    subStep = [step addStep: self
                    choice: step...choice
                    contextChange: NO // YES
                    show: NO];
  }
}

```

```

        startTermNr: -1];
    }

    //-----
    // (1) Berechne den ggt, Sonderfall abfragen: Zähler und Nenner sind gleich
    Term * ggt = ([[self zaehler] isTermEqual: [self nenner]
                  checkSign: NO] ?
                 [[self zaehler] copyTerm: PLUS] :
                 [self computeGGT: subStep // (A)
                  complete: YES]);

    #if _VERSION_STATUS < VERSION_PROD
    [IOassert: ggt != nil];
    #endif

    //-----
    // (2) Ziehe aus jedem Term den ggt heraus. Baue die Operanden Liste des neuen Terms auf
    Term * newTerm = [Term initWithTerm: ggt
                     sign: -sign];
    Term * stepTerm = [Term initWithTerm: ggt
                      sign: -sign];

    for (Term * operand in_operands) {
        Term * normResTerm = [operand computeRes: ggt];
        [newTerm insert: normResTerm]; // (B)
        [stepTerm insert: ([normResTerm is1] ? // (C)
                          [ggt copyTermHigh] :
                          [Term initWithTerm: ggt
                           sign: PLUS
                           operand1: [ggt copyTermHigh]
                           operand2: [normResTerm copyTerm]])];
    }

    //-----
    // (3) Erzeuge einen neuen Step
    if (step != nil) {
        [subStep addTerm: stepTerm]; // (B)
        [subStep addTerm: newTerm]; // (C)
    }

    return newTerm;
}

```

Literatur

- [LCAa] Auflistung der Computer Algebra Systeme.
<http://www.fachgruppe-computeralgebra.de/cms/tiki-index.php?page=Systeme>.
- [LCAb] Wikipedia Auflistung.
http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_computer_algebra_systems.
- [SBSa] Begatrix Mathway.
<http://www.mathway.com>.
- [SBSb] Microsoft Mathematics 4.0.
<http://www.microsoft.com/education/en-us/teachers/guides/Pages/Mathematics-guide.aspx>.
- [SBSc] Wolfram Alpha.
<http://www.wolframalpha.com/pro/step-by-step-math-solver.html>.