Eine Abituraufgabe aus der Analysis

Reinhard Schmidt (Fachberater Mathematik, Sachsen)

Herr Reinhard Schmidt ist Fachlehrer für Mathematik am Christian-Weise-Gymnasium in Zittau und Fachberater für Mathematik im Regierungsschulamt Bautzen, Sachsen. An dieser Schule wurde der Unterricht in einzelnen Kursen vollständig mit Unterstützung des Computeralgebrasystems Mathcad durchgeführt. Dies hat naturgemäß neben der Planung und Durchführung von Unterricht auch Auswirkungen auf die Klausuraufgaben bis hin zum Abitur. Eine Abituraufgabe des letzten Prüfungsjahres wird hier abgedruckt. Hierbei ist erkennbar, dass neben klassischen Inhalten insbesondere komplexere Terme und umfangreichere Datenmengen bearbeitet werden müssen. Die Aufgabenstellungen sind aber noch deutlich an klassische Aufgaben angelehnt.

Heiko Knechtel

Am Christian-Weise-Gymnasium begann 1997 mit Genehmigung des Sächsischen Ministeriums für Kultus der wissenschaftlich begleitete Schulversuch „Computerunterstützter MathematikUnterricht (CuMaU)“. Ab der Klassenstufe 7 wurde in einigen Klassen neben dem GTR der Computer (Tabellenkalkulation EXCEL und DGS Geonext) kontinuierlich als Werkzeug und Medium genutzt. Vor Beginn der Klassenstufe 10 entscheiden sich die Schüler dann für ein Rechenhilfsmittel: GTR oder PC. Ab diesem Zeitpunkt wird auch verstärkt das Computeralgebrasystem Mathcad (Version 2001 Prof. als offene Schullizenz für alle Schüler und Lehrer) eingesetzt. Jedem CuMaU-Schüler steht nun permanent ein PC als Hilfsmittel im Unterricht, für Hausaufgaben, in Tests, Klassenarbeiten und Klausuren zur Verfügung. Die Bewertung erfolgt auf der Grundlage der ausgedruckten und/oder handschriftlichen Lösungen.

Natürlich werden grundlegende Lerninhalte nach wie vor ohne Hilfsmittel behandelt und in jeder Leistungsüberprüfung gibt es einen hilfsmittelfreien Teil, nur mit Stift und Papier.

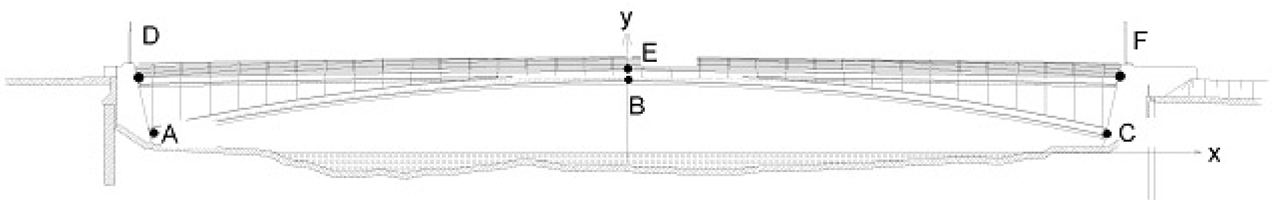
Insbesondere innerhalb der Lernbereiche „Gleichungen“ und „Funktionen“ werden verschiedenste Lösungsverfahren (numerische, graphische und algebraische) vorgestellt, diskutiert und angewendet. Neben Aufgaben mit klassischen innermathematischen Inhalten werden zunehmend offene und Anwendungsaufgaben gelöst.

Die ersten CuMaU-Schüler (je 2 Leistungs- und Grundkurse) unterzogen sich 2003 erstmalig einer eigenständigen Abiturprüfung (schriftlich und auch mündlich), bei der der PC als Hilfsmittel zugelassen war. Jedes Jahr folgen weitere Kurse.

Innerhalb der schriftlichen Abiturprüfung 2005 mussten unsere CuMaU-Schüler die unten abgedruckte Aufgabe im Leistungskurs lösen.

Abituraufgabe Analysis
(Gesamtpunktzahl der Aufgabe: 35; Gesamtpunktzahl der Prüfung: 90; Gesamtdauer der Prüfung: 300 Minuten) Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen, Kommentaren und Nebenrechnungen muss deutlich erkennbar dargestellt werden.

Die Skizze (nicht maßstäblich) zeigt den axialsymmetrischen Querschnitt der im Oktober 2004 eröffneten „Görlitzer Altstadtbrücke“. Dargestellt sind u. A. das Brückenbogenteil, das Fahrbahnteil (22 dazwischen vertikal verlaufende Stützen) und das auf dem Fahrbahnteil befestigte Geländer. Das Brückenbogenteil ist Teil eines Kreisringes. Außerdem sind die Wasseroberfläche der Neiße und das Flussbett schematisch dargestellt.



Zur mathematischen Beschreibung sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten folgender Punkte gegeben:

$$B(0/6,40), C(39,90/1,60), E(0/6,90), F(41,20/6,30).$$

Eine Einheit entspricht einem Meter.

a) Die Mittellinie des Brückenbogenteils verläuft durch die Punkte A, B und C und kann durch einen Kreisbogen mathematisch beschrieben werden. Berechnen Sie die Gleichung des Kreises k in Koordinatenform, auf dem diese Mittellinie liegt, und stellen Sie den Kreisbogen in einem geeigneten Koordinatensystem grafisch dar.

Erreichbare Punktezahl: 6

b) Zur statischen Berechnung und Dimensionierung der Stützlager der Brücke sind u. A. die Gleichungen der Tangente und Normale von k im Punkt C erforderlich. Berechnen Sie die Gleichungen dieser Tangente und Normale.

Erreichbare Punktezahl: 4

c) Für jedes y_M und r mit $y_M, r \in \mathbb{R}, r > 0$ ist eine Funktion $k_{y_M,r}$ mit $k_{y_M,r}(x) = y_M + \sqrt{-x^2 + r^2}$ gegeben. Beschreiben Sie jeweils den Einfluss der Parameter y_M und r auf den Verlauf der Graphen der Funktion.

Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion $k_{y_M,r}$, deren Graph durch die Punkte A und C verläuft und bei dem die Normale an den Graphen von $k_{y_M,r}$ im Punkt C einen Anstiegswinkel von $80°$ hat.

Erreichbare Punktezahl: 6

d) Die Form der Fahrbahndecke (im Querschnitt) kann durch Parabeln n-ten Grades beschrieben werden. Begründen Sie, welchen Grades eine solche Parabel mindestens sein muss, wenn die jeweils am linken und rechten Ende anschließenden Straßen horizontal verlaufen.

Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung dieser Parabel, so dass die Punkte D, E und F (siehe Skizze) auf dem Graphen dieser Parabel liegen.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes zwischen den Punkten D und E, wo die Fahrbahn den größten Anstieg hat. Begründen und veranschaulichen Sie Ihre Aussagen.

Erreichbare Punktezahl: 7

e) Die Form der oberen Begrenzungslinie des Brückenbogenteils kann durch eine Funktion

$$b(x) = \frac{-16133}{100} + \frac{1}{100} \cdot \sqrt{283013329 - 10000x^2}$$

mit $x \in \mathbb{R}, -39,90 < x < 39,90$ beschrieben werden. Die Form der unteren Begrenzungslinie des Fahrbahnteils kann durch eine Funktion

$$f(x) = 2,0824 \cdot 10^{-7}x^4 - 7,0695 \cdot 10^{-4}x^2 + 6,40$$

mit $x \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

Berechnen Sie, wie viel Prozent des Graphen der Funktion $b(x)$ oberhalb des Graphen von $f(x)$ liegen.

Hinweis: Formel zur Bogenlängenberechnung:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Aus statischen Gründen sind, wie im Querschnitt der Brücke dargestellt, zwischen dem Brückenbogenteil und dem Fahrbahnteil 22 vertikal verlaufende Stützen eingeschweißt. Die Strecke $\overline{AC}$ ist in 34 gleich breite Intervalle eingeteilt (siehe Skizze). Die Länge der Stützen kann als Zahlenfolge betrachtet werden. Beschreiben Sie eine Möglichkeit, die Glieder dieser Zahlenfolge zu berechnen. Begründen Sie rechnerisch, dass es sich hierbei nicht um eine arithmetische Zahlenfolge handeln kann. Berechnen Sie die Summe aller Stützenlängen (Gesamtstützenlänge).

Erreichbare Punktezahl: 7

f) Im Querschnitt des Neißeflussbettes wurden folgende Wassertiefen (in Metern, gerundet) gemessen:

Abstand zum linken Ufer	Wassertiefe
0	0
5	0,5
10	0,9
15	1,1
20	0,9
25	0,7
30	0,5
35	0,4
40	0,3
45	0,2
50	0,1
55	0

Ermitteln Sie die Durchflussmenge des Wassers pro Sekunde, wenn die durchschnittliche Fließgeschwindigkeit $0,9\,m/s$ beträgt.

Erreichbare Punktezahl: 5