3D-Grafik in der Schule mit Computeralgebra

J.-H. Müller, U. Schürmann
(Rivius-Gymnasium der Stadt Attendorn, Westfälische Wilhelms-Universität Münster)

`jan.mueller@math.uni-dortmund.de`
`schuermann.uwe@uni-muenster.de`

Zusammenfassung

Dreidimensionale Computergrafik, wie sie in Animationsfilmen oder Computerspielen Einsatz findet, ist heute für viele Schülerinnen und Schüler ein alltägliches Phänomen. Dabei beruht sie u.a. auf grundlegenden Konzepten der Analytischen Geometrie, was sie für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II interessant macht.
Im Artikel wird anhand von ersten unterrichtlichen Erfahrungen gezeigt, wie dreidimensionale Computergrafik mit einem Computeralgebrasystem (CAS) gewinnbringend für Analytische Geometrie genutzt werden kann.

Vorbemerkungen und technische Voraussetzungen

Eine Gefahr von anwendungsorientiertem Mathematikunterricht besteht darin, dass die Bearbeitung interessanter Probleme in realistischen Kontexten mitunter viel kontextspezifisches Wissen voraussetzt und zusätzliche mathematische Verfahren verlangt, die ansonsten im Unterricht nicht thematisiert würden. Ein realitätsbezogener Mathematikunterricht erfordert demnach von der Lehrkraft die geplanten Inhalte didaktisch so zu reduzieren, dass das Verhältnis von echtem Realitätsbezug und unterrichtlichen Rahmenbedingungen wie curricularen Vorgaben, Zeitkontingent und mathematischen Fähigkeiten der Lerngruppe gewahrt bleibt.

Deshalb werden im Folgenden nur solche Unterrichtsbeispiele vorgestellt, die auch Lehrpersonen und Lernende ohne explizite Kenntnisse von dreidimensionaler Computergrafik oder gar Programmierung nutzen können. Die Beispiele können am Computer von den Lernenden selbst visualisiert werden, wodurch deutlich wird, dass es sich bei den vorgestellten Beispielen um echte Anwendungen aus der Computergrafik handelt.

Die im Artikel vorgestellten Unterrichtsbeispiele beruhen auf dem CAS Maxima[1]. Es ist kostenlos und kann auf verschiedenen Betriebssystemen genutzt werden. Somit bietet es den Vorteil, dass Schülerinnen und Schüler Unterrichtsmaterialien auf dem heimischen Computer nutzen können. Durch einfache Maxima-Dateivorlagen, wie sie auch in diesem Artikel zu finden sind, kann zudem der Aufwand der Bedienung des Programms für die Lerngruppe deutlich verringert werden. Im Folgenden wird Maxima hauptsächlich als dreidimensionales Zeichenwerkzeug genutzt. Darüber hinaus sollte Maxima natürlich auch in seiner eigentlichen Funktion als CAS Verwendung finden, z. B. wenn Schnittprobleme zwischen Objekten thematisiert werden und dazu lineare Gleichungssysteme gelöst werden müssen.

Unterrichtsbeispiele

Abbildung 1: *Haus in zwei Verschiedenen Ansichten*

Beschreibung von Objekten

Die grundlegende Idee der 3D-Grafik ist die mathematische Beschreibung realer Objekte im Raum. Eine erste Übung könnte deshalb darin bestehen, Lernende zunächst geradlinig begrenzte reale Objekte mit Koordinaten beschreiben und anschließend zeichnen zu lassen. Abbildung 1 zeigt ein Haus in zwei verschiedenen Ansichten. Hierbei müssen die Lernenden Abschätzungen zu Längen- und Größenverhältnissen anstellen und entscheiden, welche Teilaspekte eines Objektes zunächst

[1] Download: `http://maxima.sourceforge.net/`. Eine Einführung in das Erstellen von Grafiken mit Maxima findet sich z. B. hier: `http://www.austromath.at/daten/maxima/zusatz/Grafiken_mit_Maxima.pdf` (Zugriff am 18.02.14).

außer Acht gelassen werden können. Auf diese Weise gewinnen sie dreidimensionale Koordinaten, die als Eckpunkte des Hauses gezeichnet werden. Um ein besseres Abbild des Hauses zu erhalten, müssen anschließend Punkte miteinander verbunden und Flächen ggf. eingefärbt werden.

Abbildung 2 zeigt einen ersten Versuch mithilfe von Maxima die Seitenwand des Hauses, die in Abbildung 1 im linken Bild zu sehen ist, mit Punkten zu beschreiben. Im Maxima-Code wird zunächst mit load(draw) ein Grafik-Paket geladen, mit dem Grafiken flexibler gestaltet werden können als mit den Standardbefehlen von Maxima. Mit dem Befehl wxdraw3d wird eine 3D-Grafik als Zusammenstellung aus verschiedenen 3D-Grafikobjekten erstellt. Im vorliegenden Fall sind dies erstens eine Reihe von Punkten für die Seitenwand, zweitens eine Reihe von Punkten für das große Fenster und drittens eine Reihe von Punkten für das kleine Fenster (jeweils mit geschätzten Maßzahlen in Meter). Es werden weiterhin verschiedene Optionen angegeben. So sorgt z. B. POINTS_JOINED=TRUE dafür, dass die Punkte miteinander verbunden werden. Um tatsächlich ein geschlossenes Vieleck zu erzeugen muss der erste Punkt am Ende noch einmal angegeben werden.

```
load(draw)$
Seitenwand:points([[0,0,0],[4,0,0],[4,0,6],[0,0,6],[0,0,0]])$
GrossesFenster:points([[2.5,0,0],[3.5,0,0],[3.5,0,2],[2.5,0,2],[2.5,0,0]])$
KleinesFenster:points([[0.5,0,4],[0.8,0,4],[0.8,0,4.3],[0.5,0,4.3],[0.5,0,4]])$
wxdraw3d(
xyplane=0,color=red,point_type=7,points_joined=true,
xrange=[0,6],yrange=[0,6],zrange=[0,6],
Seitenwand,GrossesFenster,KleinesFenster);
```

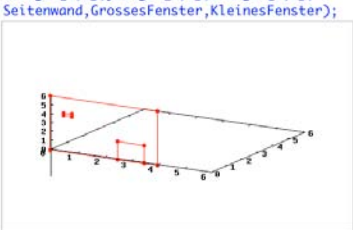

Abbildung 2: *Seitenwand des Hauses durch Punkte*

Die Wände des Hauses können natürlich ebenso gut mithilfe von Ausschnitten aus Ebenen in Parameterform beschrieben werden, wie Abbildung 3 mithilfe des Befehls PARAMETRIC_SURFACE zeigt.

Für die einzelnen Flächen werde die Parameter s und t entsprechend eingeschränkt: s liegt im gegebenen Beispiel zwischen 0 und 4 und t zwischen 0 und 6. Für die x-, y- und z-Koordinaten der Fläche werden Terme angegeben. Im Unterricht kann es z. B. gewinnbringend sein, die Lerngruppe mit der Syntax aus Abbildung 3 zu konfrontieren und einen Zusammenhang etwa zu folgender Darstellung der zur Seitenwand gehörenden Ebene in Parameterform herstellen zu lassen:

$$e_1 \;:\; x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 0 \leq s \leq 4, \;\; 0 \leq t \leq 6.$$

Ebenso gut kann den Schülerinnen und Schülern die Art der mathematischen Modellierung der Seitenwand hingegen völlig freigestellt werden. Erfahrungen aus dem Unterricht zeigen, dass es für Schülerinnen und Schüler anspruchsvoll ist, geeignete dreidimensionale mathematische Beschreibungen zu finden und diese in die Syntax von Maxima zu übersetzen. Der Einsatz von Arbeitsvorlagen und Hinweisen zur Syntax ist deshalb zu empfehlen. Die beiden gezeigten Beispiele stehen natürlich nur paradigmatisch für eine Vielzahl an Möglichkeiten, wie die gestellte Aufgabe gelöst werden kann. Uns erscheint es deshalb wichtig, Lernenden Hilfen aber keine Lösungen anhand zu geben. Der Mehrwert dieses Ansatzes entsteht durch einen anschließenden Austausch im Unterricht über die gewählten Methoden und der Abwägung ihrer jeweiligen Vor- und Nachteile.

```
load(draw)$
Seitenwand:parametric_surface(s,0,t,s,0,4,t,0,6)$
GrossesFenster:parametric_surface(s,0,t,s,2.5,3.5,t,0,2)$
KleinesFenster:parametric_surface(s,0,t,s,0.5,0.8,t,4,4.3)$
wxdraw3d(
xyplane=0,color=red,
xrange=[0,6],yrange=[0,6],zrange=[0,6],
Seitenwand,GrossesFenster,KleinesFenster
);
```

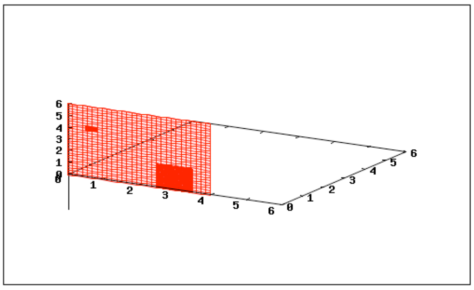

Abbildung 3: *Seitenwand des Hauses durch Ebenen*

Licht und Schatten

Um das geometrisches Objekt auf unserem Bildschirm möglichst realistisch aussehen zu lassen, ist es noch ein weiter Weg. Zu diskutieren wäre, was noch alles getan werden muss, um eine möglichst realistische Darstellung zu erreichen. Neben der Erweiterung unserer Seitenwand auf ein komplettes räumliches Modell bieten sich eine Vielzahl an Fragestellungen an, die eine kontextuelle Einbettung der üblichen curricularen Vorgaben der Analytischen Geometrie ermöglichen. Die folgenden Fragestellungen zeigen, dass unser Beispiel hierfür geeignet ist.

3D in 2D

Unabhängig von unserem Beispiel zeigte sich in Unterrichtssituationen, wie konsterniert viele Schülerinnen und Schüler auf die Frage reagieren, wie die dreidimensionale Wirkung von Objekten bei der Darstellung auf einer eigentlich zweidimensionalen Bildschirmfläche zustande kommt. In diesem Zusammenhang können sich Bezüge zum Kunstunterricht ergeben. So führt beispielsweise die Zentralperspektive mittels eines zu definierenden Fluchtpunktes auf das Erstellen von Geradengleichungen im Raum und das Ermitteln von Schnittpunkten mit einer zu definierenden „Bildschirmebene“. Und im Zusammenhang mit der Parallelperspektive kann zudem die Eigenschaft linearer Abhängigkeit

von Richtungsvektoren der Geradengleichungen thematisiert werden.

Schattenwurf
Nach der Thematisierung von Geraden- und Ebenengleichungen werden im Unterricht üblicherweise Schnittprobleme behandelt. Definiert man eine Lichtquelle im Raum, so kann analysiert werden, welchen Schatten das Haus in der Ebene wirft. In diesem Kontext ergeben sich Schnittprobleme auf natürliche Art- und Weise. Wegen der hierfür zu lösenden Gleichungssysteme wird das CAS zunehmend bedeutsam.

Einfärbung der Seitenwände
Da die Lichtquelle die Seitenwände des Hauses unterschiedlich direkt beleuchtet, ist es ebenso naheliegend zu fragen, wie die Seitenwände (etwa in Graustufen) eingefärbt werden sollten. Qualitativ ist klar, dass eine Seitenwand, die der Lichtquelle zugewandt ist heller einzufärben ist als eine Seitenwand, die der Lichtquelle weniger stark zugewandt ist. Als Maß der „Zugewandtheit" können Winkel genutzt werden, die z. B. zwischen Normalenvektoren zu einer Seitenwand und einer Verbindung der Seitenwand zur Lichtquelle ermittelt werden.

Dynamik
Ein Haus möchte man sich natürlich von allen Seiten anschauen, vergrößern, verkleinern oder in die eine oder andere Richtung verschieben können (etwa so, wie Architekten am Computer vorgehen, wenn sie ein Gebäude entwerfen). Anhand dieser Problemstellung können Matrizen und die Matrix-Vektor-Multiplikation eingeführt werden. Mit den Matrizeneinträgen können Schülerinnen und Schüler experimentieren und bekommen die Wirkung jeder Veränderung vom Programm veranschaulicht.

Ausblick und Grenzen des Ansatzes

Wie sich gezeigt hat, lassen sich einige interessante Anwendungen aus der Computergrafik mithilfe eines CAS im Unterricht realisieren. Die hier vorgestellten Beispiele sind durchaus erweiterbar, z. B. indem der Kontext Computergrafik ergänzt wird durch rechenminimierende Verfahren oder mathematischen Problemen, wie sie sich bei der Programmierung von Computerspielen stellen (vgl. Schürmann 2014 b). Es können somit viele Begriffe und Verfahren der Analytischen Geometrie anwendungsorientiert eingeführt bzw. vertieft werden. Ebenso lohnt sich ein Blick auf digitale Bildbearbeitung (viele Anregungen bietet der ISTRON-Band 9) oder das RGB-Farbmodell, welches für die Darstellung von Farben auf Computerbildschirmen verwendet wird. Auch dieser Kontext kann im Sinne der Analytischen Geometrie gedeutet werden (vgl. Schürmann 2014 a). Beide Kontexte, Computergrafik und Farbmodelle, bauen eine Brücke zum Kunstunterricht, wo perspektivische Zeichnungen und Farbmodelle ebenfalls von Bedeutung sind. Ein fächerverbindender Unterricht wird damit möglich.

Literatur

[1] Meyer, Jörg und Oldenburg, Reinhard (Hrsg.) (2006): Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. *Istron-Schriftenreihe Band 9: Computeranwendungen*, Berlin, Hildesheim, Franzbecker-Verlag.

[2] Schürmann, Uwe (2014 a): Abbildungsmatrizen im Kontext von Farbtransformationen in Vektorgrafiken. *PM* 55/56, S. 43 – 47.

[3] Schürmann, Uwe (2014 b): 3D-Computerspiele und Analytische Geometrie. Maaß, Jürgen und Hans-Stefan Siller (Hrsg): Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 2, *ISTRON-Schriftenreihe*, S. 115 - 130.