Enrichment, Computermathematik & Maple

Prof. Dr. Thomas Schramm
Department Geomatik
HafenCity Universität Hamburg
Hebebrandstraße 1
22297 Hamburg

Tim Buhrke
Gymnasium Wentort
Hohler Weg 16
21465 Wentorf bei Hamburg

thomas.schramm@hcu-hamburg.de
tim_buhrke@web.de

Zusammenfassung

Enrichment ist ein Förderkonzept für besonders begabte Schülerinnen und Schüler an Schleswig-Holsteiner Schulen. Diese Schulen haben sich in Verbünden organisiert und bieten schulübergreifend Kurse an. Wir berichten über einen **Workshop für Computermathematik**, der am Gymnasium Wentorf in Zusammenarbeit mit der HafenCity Universität Hamburg statt findet.

Vorgeschichte

Seit einigen Jahren verstärkt sich an den Hochschulen der Eindruck, dass sich die Leistungen der Studienanfänger in den Naturwissenschaften und der Mathematik verschlechtern. Dass dieser Eindruck nicht nur *gefühlt*, sondern regional unterschiedlich nachweisbar ist (vergl. [1]), verstärkt die Motivation etwas dagegen zu unternehmen. Härtere Aufnahmekriterien sind bei schwindenden Bewerberzahlen sicher keine zukunftsorientierte Lösung. Das Gespräch mit Schulen zu suchen eher. Beide Seiten können davon profitieren. An Schulen wird das Anforderungsprofil der Hochschulen deutlich, aber die Hochschulen können auch lernen, dass Schulabsolventen vermehrt neue Kompetenzen (z.B. Organisations-, Kritik-, Problemlösungs- und Teamfähigkeit) mitbringen, die genutzt werden müssen.

Vor diesem Hintergrund wurden vom Department Geomatik der HafenCity Universität Hamburg (ehemals an der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg) ein- und mehrtägige Messpraktika (Turmhöhen- und astronomische Breitengradbestimmung) an Schulen in Hamburg und im Umland mit dem Motto „Mathematik macht Spaß und ist anwendbar“ durchgeführt. Ein Kontakt, geboren aus der Elternmitarbeit, hat sich dauerhaft etabliert. Mit einer Lehrerfortbildung wurde das Computeralgebrasystem (CAS) Maple am Gymnasium Wentorf eingeführt. Seither gibt es unter der Leitung der Autoren eine Schüler-Arbeitsgruppe mit dem Namen CoMa-AG zur **Co**mputer-**Ma**thematik (vergl. [2, 3]). Die Idee war (und ist) es, den Schülerinnen und Schülern aller Altersstufen gemeinsam Freude an der Arbeit mit dem Komplizierten zu vermitteln.

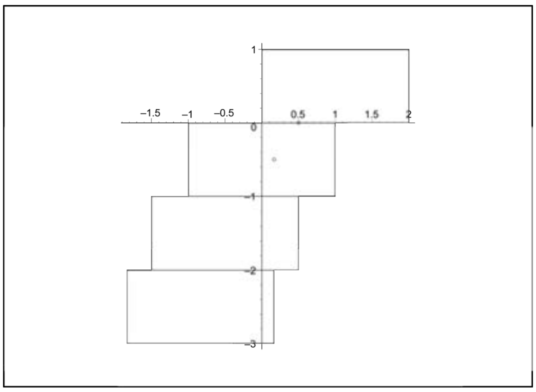
CoMa-AG

Diese Ziele wurden teilweise erreicht, insbesondere, nachdem wir unsere Konzeption etwas angepasst hatten und neben Bearbeitung mathematischer Fragestellungen auch mit sog. Mindstorm-Robotern experimentierten (de.wikipedia.org/wiki/Mindstorm), oder zur Entspannung mit thematisch naheliegenden Computerprogrammen (z.B. Crazy Machines (de.wikipedia.org/wiki/Crazy_Machines)) spielten.

Zu Beginn gaben wir eine kleine Einführung in das Computeralgebrasystem Maple und regten die Mitglieder an, neu hinzukommende einzuweisen. Wir analysierten verschiedene Fragestellungen z.B. das ...

Telefonbuchproblem

Wie weit kann man die Bücher auf einem Telefonbuchstapel verrücken, um bei einer gegebenen Anzahl eine möglichst große Strecke in der Horizontalen zu überbrücken, ohne, dass der Stapel umkippt? Da keine Telefonbücher zur Hand waren, wurde das Problem mit Bauklötzen abstrahiert und experimentiert. So nebenbei wurde dabei das Konzept des Schwerpunktes gefunden und entsprechende Zeichnungen mit Maple erstellt.



Telefonbuchstapel mit maximaler Verrückung nach rechts. Der Schwerpunkt aller über einem Buch befindlichen Bücher befindet sich jeweils genau auf der rechten Kante.

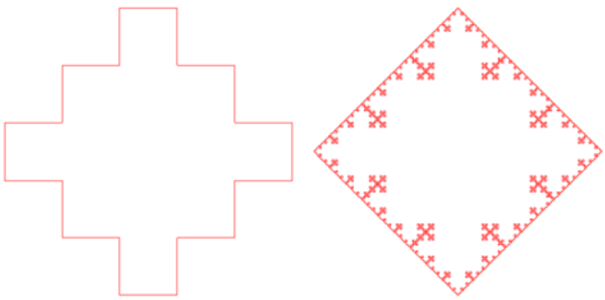
Dieses Beispiel zeigte, dass hier jede Altersstufe angesprochen werden konnte. Die jüngeren experimentierten, zeichneten auf Papier und übertrugen Koordinaten in den Plotbefehl Maples. Gemeinsam wurde eine Formel für die jeweilige „Verrückung“ aus Zahlenbeispielen entworfen, mit Maple ausprobiert und dann die Frage, die wir hier nicht beantworten wollen, diskutiert, wie weit das denn gehen kann — theoretisch und praktisch.

Ein weiteres Highlight aus der gemeinsamen Arbeit war die Konstruktion der ...

Schneeflocke

Hier wurde die Frage bearbeitet, was denn mit der Gesamtfläche einer „Schneeflocke“ genannten Figur passiert, wenn man bei einem Quadrat jeweils auf die Mitte der Seiten ein neues Quadrat platziert, das ein Drittel der Seitenlänge des Ausgangsquadrats hat und dieses Verfahren auf jeder der entstehenden neuen Seiten mit jeweils genauso verkleinerten Quadraten ad infinitum Stufe um Stufe fortsetzt.

Dieser etwas kompliziert zu erklärende Vorgang ist an der Tafel schnell skizziert und koordinatenweise in Maple übertragen. Dabei zeigten gerade die jüngeren Schülerinnen und Schüler eine ungeheure Akribie und konstruierten und rechneten Stufe um Stufe der Iterationen. Ein Team brachte es bis zur 15. Stufe und stellte fest, dass die Gesamtfläche nie das Zweifache des Ausgangsquadrates übersteigt.



Links ein Bild der ersten und rechts eines der vierten Stufe der Schneeflocke.

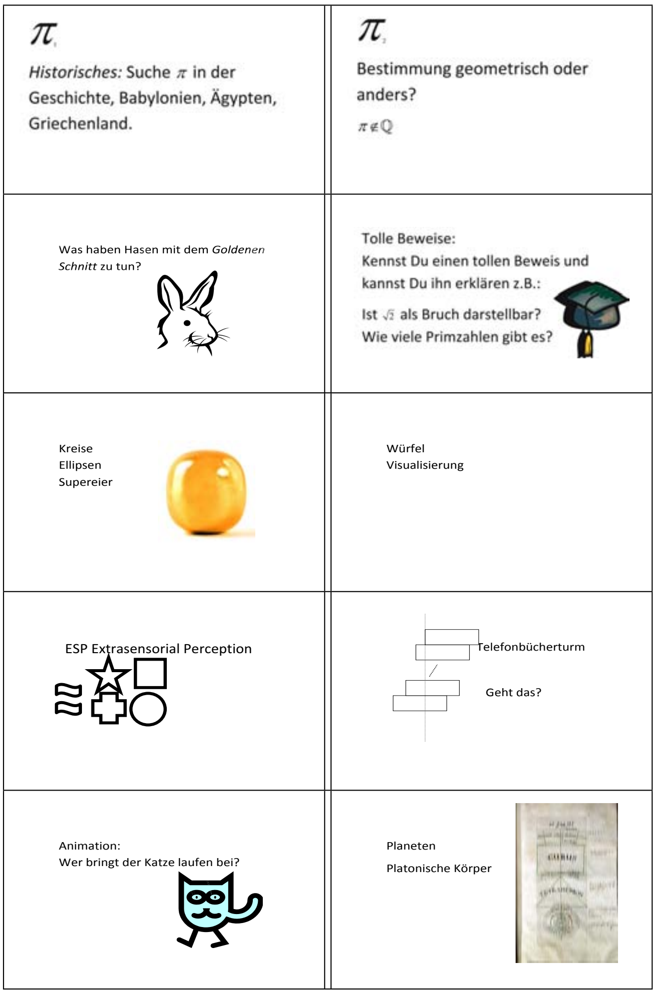
Hanna, aus der achten Klasse, hat Ihre Gedanken dazu aufgeschrieben: *Nun habe ich überlegt, ob, wenn man diesen Vorgang immer wieder wiederholt, es irgendwann vom Flächeninhalt her 2 Quadrate von der ursprünglichen Größe gibt. Obwohl ich viele Schritte ausgerechnet habe, gab es keine zwei Quadrate. Zuerst haben wir die Vermutung angestellt, dass es sogar beliebig groß wird, weil ja immer etwas dazu kommt. Aber das, was dazu kommt, ist ja immer kleiner und so kann es nie ein Ganzes werden.* Die älteren Schüler entwickeln hier mit etwas Hilfe eine Formel für die Gesamtfläche und bestimmen mit Hilfe Maples den Grenzwert, der die Vermutung bestätigt.

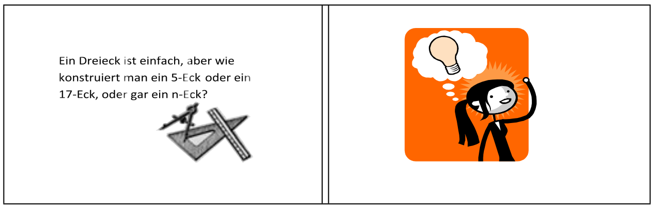
Diese Highlights dürfen jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, dass solche Arbeitsgruppen sehr betreuungsintensiv sind. Der Workshopcharakter stellt sich nur zeitweise ein und es ist schwierig den Spannungsbogen für komplexere Probleme altersübergreifend aufrecht zu erhalten. Insofern waren wir gespannt, wie sich die Situation mit der Einführung des Enrichmentkonzeptes ändern würde.

Enrichment

Im Schuljahr 2007/2008 wurde die CoMa-AG zum Enrichment Workshop für Computermathematik erweitert. Innerhalb des Enrichment-Konzeptes bekommen besonders geeignete Schülerinnen und Schüler der umliegenden Schulen meist durch die Zeugniskonferenzen eine Empfehlung, sich für Enrichment-Kurse zu bewerben. Schlicht gesagt werden dort Schülerinnen und Schüler ausgewählt, die „mehr Futter“ benötigen und das müssen nicht unbedingt immer die Klassenbesten sein (`enrichment.lernnetz.de`). Zu Beginn des Schuljahres konnten wir 14 Teilnehmerinnen und Teilnehmer von vier Gymnasien begrüßen, die z.T. erhebliche Wege in Kauf nahmen. In der Zwischenzeit ist die Gruppe etwas geschrumpft, aber recht aktiv.

Unsere Ziele waren hoch gesteckt. Eigentlich wollten wir nur Themen anbieten und die Ausgestaltung den Schülerinnen und Schülern überlassen. Es sollten sich kleine Gruppen bilden, die selbstständig das Thema erarbeiten und dokumentieren sollten. Das Ziel war ein Verständnis des Problemkreises, die Dokumentation im Internet und ein Vortrag in der Gruppe. Wir wollten ein „lernerzentriertes“ Arbeitsklima schaffen und selbst nur als „Coach“ agieren. Unsere Themenangebote waren z. B.:





Die Themen wurden auf Kärtchen von den Schülerinnen und Schülern herumgereicht und es konnte frei gewählt werden. Auf die Frage, was denn zu tun sei, haben wir erst einmal bewusst nur mit der Schulter gezuckt. Wir bemerkten lediglich, dass zur Bearbeitung Maple benutzt werden könnte und wir für Fragen zur Verfügung stehen würden, man könne aber auch die anderen fragen oder im Internet suchen. Das letzte Thema sei ein Joker, für die, die schon wüßten, was sie machen wollten. Hier waren die jüngeren zuerst etwas überfordert. Zwei Mädchen aus der Oberstufe eines externen Gymnasiums offenbar nicht. Sie wählten das Fibonacci-Thema (Hasen, Goldener Schnitt) probierten etwas in Maple herum und meldeten sich nach einer Stunde als „fertig". Sie hatten das Thema bereits im Unterricht behandelt und nicht wirklich verstanden, dass wir lediglich einen Startpunkt gegeben hatten. Auch hatten wir den Eindruck, dass sie sich im Kreise der „Kleinen" nicht wirklich wohl fühlten. Wir hatten auch keine Chance unser Konzept zu erläutern, da sie zum nächsten Termin nicht mehr erschienen.

Der Rest der Gruppe war etwas geduldiger (mit uns). Gewählt wurden die Themen:

- π — Historisch
- Tolle Beweise
- Würfel visualisieren
- ESP
- Platonische Körper
- Fünfeck

Wir wollen im Folgenden kurz über die Einzelprojekte berichten.

π — Historisch

Hanna und Jasmin (8./7. Klasse) näherten sich dem Thema anders als (von uns) gedacht. Sie beschäftigten sich mit den Rechenkünsten und insbesondere den Darstellungen der Zahlen im alten Ägypten und Rom. Sie fassten Ihre Erkenntnisse in einer Powerpoint-Show zusammen und erzeugten auch eine HTML-Version, die bald im Internet zu bewundern sein wird [6].

Tolle Beweise

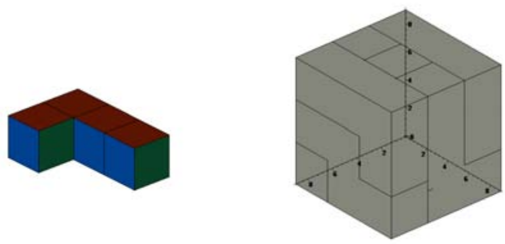
Marvin aus einer sechsten Klasse interessierte sich für Primzahlen und arbeitete allein. Er experimentierte mit Maple, um die Primfaktorzerlegung von Zahlen zu erhalten. Hierzu eigneten sich die Befehle isprime, ithprime, nextprime, prevprime und ifactor besonders gut. Er fand eine Version des *Satzes von Euklid* bei Wikipedia (de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Euklid) und probierte die Beispiele mit Maple aus. Es ging darum, die Argumentationskette, dass es unendlich viele Primzahlen geben muss, *wirklich* zu verstehen, so dass sie den anderen erklärt werden konnte. Hierzu fertigte er ein Word-Dokument an, das auch mit Maple und für das Internet aufbereitet wird. Während seines Vortrages tauchten weitere Fagen auf z.B.: wieso es nur eine Primfaktorzerlegung gäbe, die er noch beantworten will.

Würfel visualisieren

Kim und Nicolas aus der sechsten Klasse nahmen sich vor, das Zusammensetzen eines Puzzlewürfels mit Maple zu visualisieren. Nicolas entdeckte in Maple eine Plotstruktur PLOT3D(POLYGONS(...)), die er an das Problem der Teilwürfel anpasste. Der Plan ist für jeden Teilwürfel eine Struktur zu entwerfen und diese dann animiert zusammenzufügen. Kim benutzte ebenfalls die Maplefunktionalität, um den fertigen Würfel darzustellen. Nach harter Arbeit hatte er seine Punktfolge zusammen. Hier ein Ausschnitt

```
with(plots):
polygonplot3d([[9,0,0],[0,0,0],
[0,9,0],[0,0,0],[0,0,9],[0,9,9],
[0,0,9],[9,0,9],[9,0,0],[9,9,0],
[9,9,9], ...
[6,3,0],[6,6,0],[6,9,0],[9,9,0]],
axes=normal);
```

Es hat uns erstaunt, mit welcher Energie die beiden ihr Ziel verfolgten, allerdings auch die Hartnäckigkeit, mit der Ratschläge ignoriert wurden. Wir konnten allerdings schon häufiger beobachten, dass gerade jüngere Schüler und Schülerinnen durch große geordnete Zahlenmengen und deren Darstellungen fasziniert wurden. Hier noch zwei Figuren, die die beiden aus ihren Daten erzeugten.



Links Nicolas Teilwürfel des zu animierenden Gesamtsystems, das rechts als Kims Außenansicht zu sehen ist.

ESP

In diesem, etwas scherzhaften gemeinten Projekt, haben Jan, Tim und Tobias (10. Klasse) den Standardtest zur Bestimmung „außersinnlicher Wahrnehmung" (engl. **e**xtrasen**s**orial **p**erception, esp) mit den Mitgliedern der Gesamtgruppe und den Leitern durchgeführt.

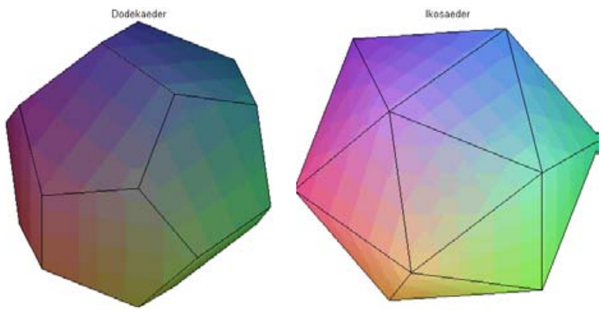
(Wir haben zu diesem Zeitpunkt vom Comeback Uri Gellers noch nichts geahnt). Schnell wurde das Konzept des Mittelwertes und der Varianz angewendet, aber auch die Frage gestellt, was denn *normal* sei. Hierzu gab es eine Extrastunde in Testtheorie. Offensichtlich ist niemand von uns paranormal begabt. Jetzt sollen die Ergebnisse mit dem Statistikpaket Maples aufbereitet und dokumentiert werden.

Platonische Körper

Diana aus einer achten Klasse hat sich dem Problem der platonischen Körper und der Verwendung für ein Modell des Planetensystems durch Kepler interessiert. Sie trug dazu Informationen aus dem Internet (de.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler) zusammen und diskutierte mit uns die Modellbildung, die Kepler selbst zugunsten der heute so genannten keplerschen Gesetze verwarf. In einem ersten Kurzvortrag stellte Diana eine Powerpoint-Show zusammen. Für die endgültige Dokumentation versucht sie platonische Körper mit Maple darzustellen und diese für das keplersche Modell ineinander zu schachteln. Hierzu eignet sich das geom3d-Paket in Maple mit dem Befehl RegularPolyhedron besonders gut. Allerdings ist die Dokumentation auf Englisch und wir helfen nur ausnahmsweise. Z.B. erzeugt die Befehlsfolge

```
with(geom3d);
RegularPolyhedron(a, [5,3],
    point(o,0,0,0),1);
RegularPolyhedron(b, [3,5],
    point(o,0,0,0),1);
draw(a, title = "Dodekaeder");
draw(b, title = "Ikosaeder");
```

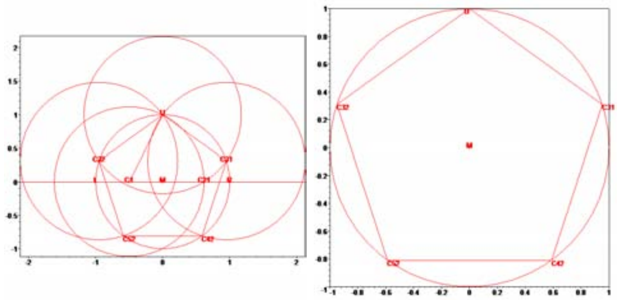
einen Dodekaeder und einen Ikosaeder.



Zwei platonische Körper für Mars- Erd- und Venusbahn

Fünfeck

Alena und Carolin aus der neunten Klasse erforschen auf Gauß' Spuren die Konstruktion von regelmäßigen Vielecken. Bei 17 sind sie noch nicht, aber das Fünfeck ist verstanden. Hier bietet sich das geometry-Paket Maples an, eine Zirkel- und Linealkonstruktion algorithmisch nachzuempfinden, auch, wenn die Syntax etwas gewöhnungsbedürftig ist.



Die algorithmische Konstruktion und das bereinigte Ergebnis eines Fünfecks mit dem geometry-Pakets Maples

Fazit

Wir glauben, dass wir mit unserem Konzept auf dem richtigen Weg sind, den Schülerinnen und Schülern nachhaltig Freude am Umgang mit mathematischen oder allgemein schwierigen Problemen zu vermitteln. Maple ist sicher ein geeignetes Werkzeug, wenn es mit Augenmaß eingesetzt wird. Wir nutzen es als allgemeine „Problemlösungsumgebung" bzw. als Erweiterung des Schreibpapiers und ermöglichen so die Behandlung des Nichttrivialen. Mittelfristig können solche Projekte dazu dienen, den Dialog zwischen Schule und Hochschule zu intensivieren, die Schülerinnen und Schüler besser auf ein mögliches Studium vorzubereiten und letztendlich den Studienerfolg zu verbessern.

Links und Literatur

[1] C. Polaczek, *Studienerfolg in den Ingenieurwisssenschaften. Eingangsvoraussetzungen — Prognose — Validität*, Proc. Minisymp. DMV Berlin 2007, Heft 01/2007 Teil 1, Wismarer Frege-Reihe, Wismar, 2007.

[2] T. Schramm und T. Buhrke, *Mathematisches Assessment in der Schul- und Ingenieurausbildung*, Proc. Minisymp. DMV Berlin 2007, Heft 01/2007 Teil 2, Wismarer Frege-Reihe, Wismar, 2007.

[3] T. Schramm, *Back to School: Mathematikförderung zwischen Universität und Schule*, Global J. of Engng. Educ., Special Edition, 10(3):315, 2006.

[4] Superei: Bild von Malene Thyssen, siehe commons.wikimedia.org/wiki/Image:Superaeg.jpg.

[5] Zeichnung: Johannes Kepler, siehe de.wikipedia.org/wiki/Bild:Kepler-1619-pl-3.jpg.

[6] Weitere Informationen unter coma.gymnasium-wentorf.de/.

Wellen als Vektoren

Roland Mechling
Oken-Gymnasium
Vogesenstraße 10
77652 Offenburg

roland@mechling.de

Dynamische Geometriesysteme (kurz DGS) können in vielen Situationen zur Klärung und Veranschaulichung komplizierter Zusammenhänge eingesetzt werden. Im folgenden Aufsatz wird das von Richard P. Feynman eingeführte Verfahren der „Zeigeraddition“ zur Behandlung von Interferenzphänomenen (vgl. [1]) dargestellt und in einigen einfachen Situationen angewendet. Die Abbildungen sind statische Bilder von dynamischen Zeichnungen, die mit einem DGS (hier: DynaGeo) erstellt wurden. Natürlich erschließen sich manche Aspekte der in den Bildern steckenden Informationen erst beim interaktiven Umgang mit den dynamischen Zeichnungen, weshalb letztere im WWW frei zur Verfügung gestellt werden (siehe unten).

Richard P. Feynman (Quelle: [2])

Jeder Oberstufenschüler hat im Unterricht bei der Einführung der trigonometrischen Funktionen wohl schon einmal ein Bild wie das folgende gesehen:

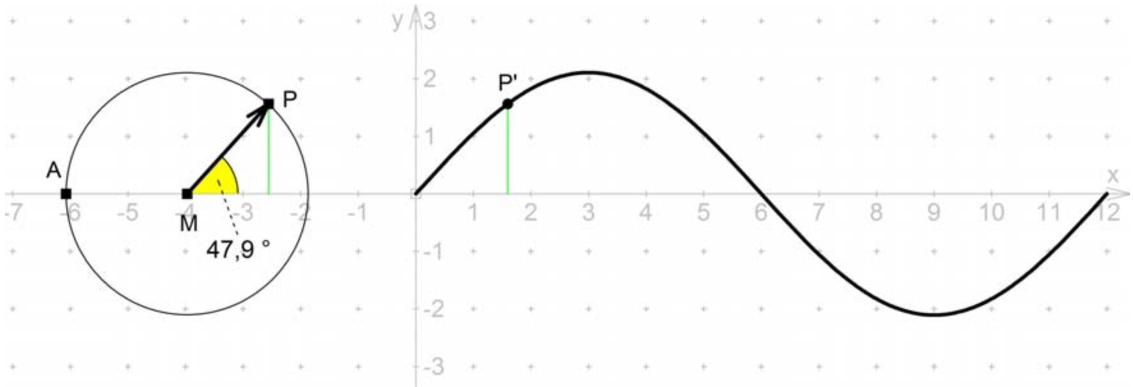


Abb. 1

Läuft P auf dem dargestellten Kreis einmal im Gegenuhrzeigersinn herum, dann beschreibt P’ die dargestellte sinusförmige Kurve. Die y-Koordinate von P’ ist dabei stets gleich der y-Koordinate von P, während die x-Koordinate von P’ proportional zu dem Winkel ist, den der Pfeil $\overrightarrow{MP}$ mit der positiven x-Richtung einschließt. Wichtig ist nun, dass das linke Bild mit dem Vektor $\overrightarrow{MP}$ genau die gleichen Informationen enthält wie das rechts dargestellte Funktionsschaubild: zu jeder möglichen Lage von P gehört eine eindeutig festgelegte Lage von P’, und umgekehrt. Also ist der rotierende Vektor $\overrightarrow{MP}$ eine vollständige Repräsentation der rechts dargestellten sinusförmigen Kurve.

Betrachten wir einen zweiten Punkt Q, der ebenfalls auf einem Kreis um M läuft, aber möglicherweise in einem anderen Abstand als P. Dabei soll der Winkel $\Delta\varphi$ zwischen den Vektoren $\overrightarrow{MQ}$ und $\overrightarrow{MP}$ stets konstant bleiben. Die beiden Vektoren sollen also synchron um M rotieren, d.h. mit derselben Winkelgeschwindigkeit. Das zu Q gehörende Schaubild ist dann ebenfalls eine sinusförmige Kurve, die aber gegenüber der zu P gehörigen Kurve phasenverschoben ist. Man erhält dann z.B. das folgende Bild.

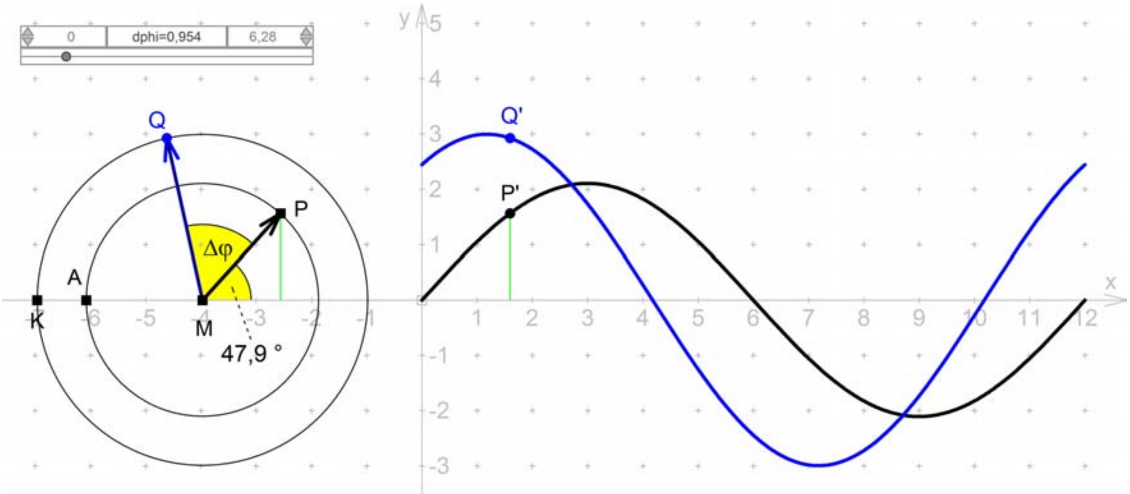


Abb. 2

Interpretieren wir die beiden Schaubilder als Momentaufnahmen von Wellen, die sich auf einem linearen Träger (z. B. einem Seil) bewegen, dann interessiert den Physiker, wie sich der Träger verhält, wenn sich beide Wellen gleichzeitig auf ihm ausbreiten. Wir wissen, dass sich die Einzelwellen ungestört überlagern, indem sich die einzelnen Auslenkungen addieren. Welche Kurve erhält man nun, wenn man die beiden sinusförmigen Kurven addiert? Wenn wir die Erkenntnis benutzen, dass die Vektoren alle Informationen über die zugehörigen Schaubilder enthalten, dann können wir statt der üblichen y-Werte-Addition der Schaubilder auf der rechten Seite viel einfacher die Vektoren auf der linken Seite addieren: dies führt zu einem Summenvektor $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}$, und die zum rotierenden Punkt R gehörende Kurve ist das gesuchte „Summenschaubild“ (siehe Abb. 3).

Dieses Verfahren ist verallgemeinerbar auf die Addition vieler Vektoren, und es leistet besonders dort gute Dienste, wo viele sinusförmige Größen addiert werden müssen. Als einfaches Beispiel soll hier die Beugung von Licht am Vierfachspalt betrachtet werden.

An der Stelle VSp befinde sich ein Vierfachspalt, der von einer (hier nicht eingezeichneten) von links kommenden ebenen Lichtwelle beleuchtet wird. Die Wellenlänge des Lichts (in nm) kann am Zahlobjekt „Lambda“ eingestellt werden, der Abstand g (in μm) benachbarter Spalte am Zahlobjekt „g“. Wir betrachten nur den Fall sehr enger Spalte, so dass jeder der vier Spalte als Ausgangspunkt einer einzigen Elementarwelle angesehen werden kann, so wie es das Huygens’sche Prinzip vorschreibt. Wenn wir nun nach der Lichtintensität in einem Punkt B auf dem (weit entfernten) Schirm fragen, müssen wir dort die von den vier einzelnen Spalten kommenden Wellen überlagern. Dabei ist die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ benachbarter Wellenstrahlen aufgrund des Gangunterschiedes um so größer, je weiter B von der optischen Achse entfernt liegt. Diese Phasenverschiebung wird im Termobjekt „dphi“ passend zu den vorgegebenen Daten (Wellenlänge, Spaltabstand, Position von B) berechnet, so wie man das im Physikkurs der Oberstufe lernt.

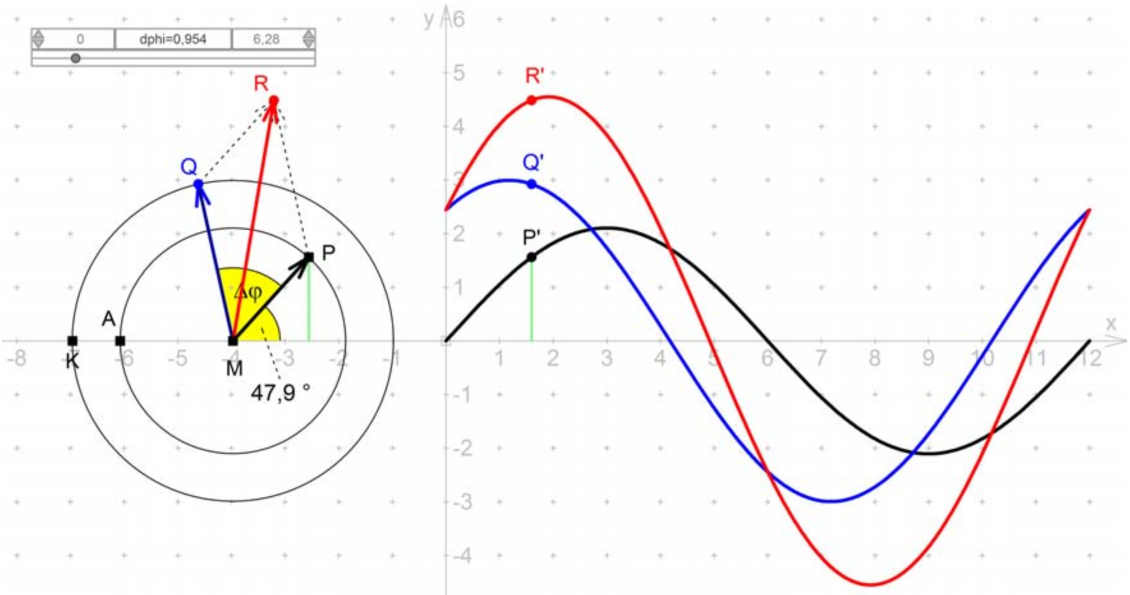


Abb. 3

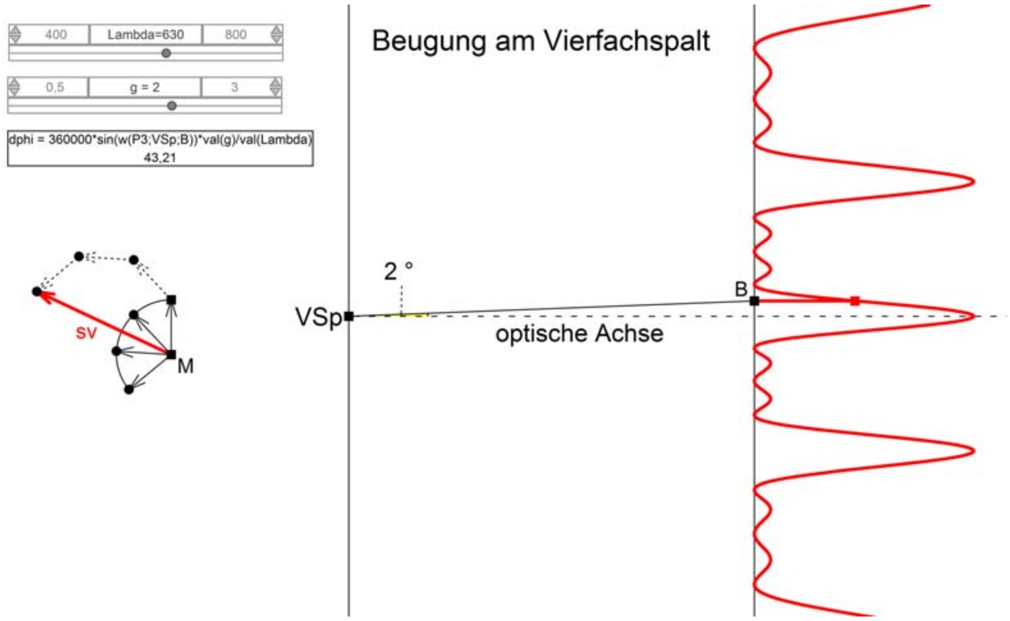


Abb. 4

Die resultierende Amplitude der in B ankommenden Lichtwelle erhalten wir nun durch Vektoraddition: die vier von M ausgehenden Vektoren repräsentieren die von den einzelnen Spalten ausgesandten Elementarwellen. Dabei kann die Richtung des ersten (!) Vektors beliebig gewählt werden; wichtig ist nur, dass der Winkel zwischen den einzelnen Vektoren die jeweils passende Phasenverschiebung „dphi“ ist. Mit Hilfe der gestrichelt gezeichneten Kopien von drei der Vektoren wird nun die Vektoraddition durchgeführt, was den Summenvektor $\overrightarrow{sv}$ ergibt. Schließlich ist die in B zu beobachtende Lichtintensität proportional zum Amplitudenquadrat, also zu $\left|\overrightarrow{sv}\right|^2$. Zu jeder möglichen Lage von B auf dem Schirm ist die so errechnete (relative) Intensität nach rechts aufgetragen. Man sieht den typischen Intensitätsverlauf des Beugungsbilds eines Vierfachspalts, mit drei Dunkelstellen und zwei schwachen Nebenmaxima zwischen benachbarten Hauptmaxima.

Besonders instruktiv ist es nun, den Punkt B auf dem Schirm entlang zu ziehen und sich dabei die Entwicklung der Vektorsumme anzuschauen. Dabei kann man verstehen, wie es zu den Dunkelstellen zwischen den Hauptmaxima kommt, und warum es eigentlich Nebenmaxima gibt.

Damit Sie nun auch in den Genuss des interaktiven Umgangs mit einer dynamischen Zeichnung kommen, sind alle hier verwendeten Konstruktionen unter `www.geometrie-online.de` frei verfügbar. Sie sind mit DynaGeo erstellt, können aber auch ohne dieses Programm studiert werden, wenn Sie Ihrem Browser die Verwendung des Viewers DynaGeoX erlauben bzw. ermöglichen. Die Website enthält noch einige weitere Beispiele zur Wellenoptik und Interferenz, so z. B. das Beugungsbild eines Zehnfachspaltes, welches durchaus schon dem eines optischen Gitters nahe kommt.

Zum Schluss noch eine Anwendung, die auf den Einsatz der „Zeigeraddition“ in der Quantenmechanik hinweist: Wenn Licht von einem Sender S über einen Spiegel zu einem Empfänger E gelangen soll, woher „weiß“ es dann, welchen Punkt des Spiegels es „anpeilen“ muss? Zum genaueren Studium dieser Situation besetzen wir den Spiegel mit vielen Testpunkten, die hier der Einfachheit halber äquidistant gewählt werden. Jeder Testpunkt soll Ausgangspunkt einer reflektierten Elementarwelle sein. Weil wir voraussetzen, dass das Licht sich im Raum vor dem Spiegel jeweils geradlinig ausbreitet, erhalten wir für jeden Testpunkt P_i einen zugehörigen möglichen Lichtweg SP_iE:

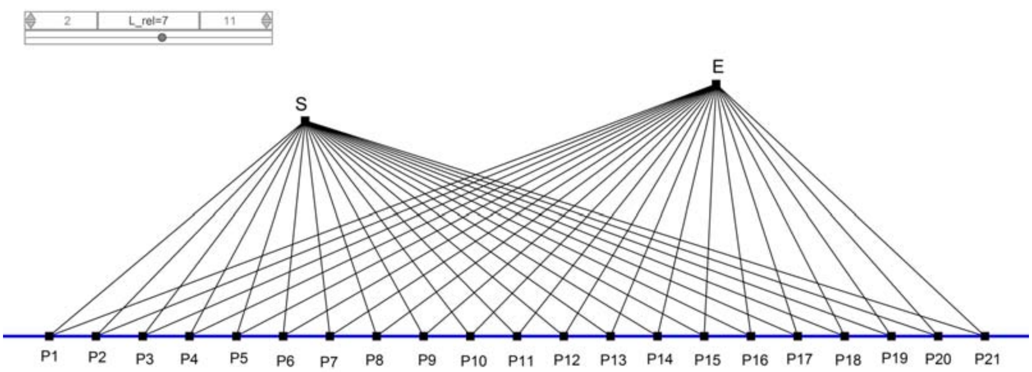


Abb. 5

Analog zum vorigen Beispiel ergibt sich die Amplitude der in E ankommenden Gesamtwelle durch Addition der Vektoren, die zu den auf den einzelnen Lichtwegen verlaufenden Wellenstrahlen gehören. Insgesamt erhält man für diese Vektorsumme das folgende Bild:

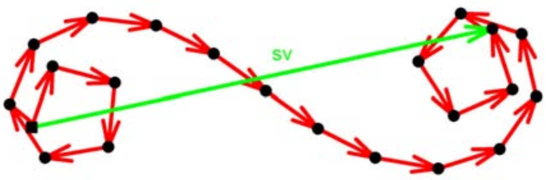


Abb. 6

Man erkennt: Der wesentliche Beitrag zum Summenvektor $\vec{sv}$ wird von den „mittleren“ Testpunkten geliefert, während die „exotischeren Wege“ über die äußeren Testpunkte nahezu wirkungslos bleiben. Die Amplitude der in E ankommenden reflektierten Welle wird also im Wesentlichen durch wenige Testpunkte auf dem Spiegel bestimmt, und zwar gerade durch diejenigen, die sich dicht bei der durch das klassische Reflexionsgesetz vorausgesagten Stelle befinden. Verwendet man mehr Testpunkte (oder geht man gar mit den Mitteln der höheren Mathematik zu unendlich vielen über), dann erhält man eine schön gerundete „Cornu-Spirale“.

Literaturverzeichnis

[1] R. P. Feynman, *QED — Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie*, Piper Verlag, München, Sonderausgabe, 2006.

[2] Quelle des Bildes von R. P. Feynman: www.britannica.com/eb/article-9034161/Richard-P-Feynman.