CAS funktional im Mathematikunterricht

H. Körner
(Studienseminar Oldenburg für das Lehramt an Gymnasien)

hen.koerner@t-online.de

Zusammenfassung

Mathematikunterricht mit CAS. Was bleibt? Was ändert sich? In diesem Artikel wird anhand von Beispielen der Einfluss eines so mächtigen Werkzeuges auf Inhalte, Schwerpunkte und Methoden des Mathematikunterrichts diskutiert.

Es sind drei Aspekte, die die grundlegenden Erweiterungen des CAS ausmachen:

(A) Parallele Verfügbarkeit von Termen, Graphen und Tabellen

(B) Algebraisch – syntaktische Fertigkeiten des CAS.

(C) Freie Definition von – auch mehrstelligen – Funktionen.

Die durch (A) bedingten Modifikationen erfolgen schon durch GTR und TK, müssen aber natürlich beim Arbeiten mit einem CAS immer auch integrativ mitgedacht werden. Schon diese Trias „Graph-Tabelle-Term“ nivelliert stark die traditionelle Überbetonung der syntaktisch orientierten Algebra im traditionellen Mathematikunterricht. In diesem Beitrag wird das Augenmerk auf die Möglichkeiten von CAS gelegt, die über GTR und TK hinausgehen. Dies erfolgt anhand unterrichtserprobter Beispiele, die die folgenden zentralen Thesen zur Arbeit mit einem CAS konkretisieren (ausführlicher in [1]).

(1) Die Arbeit mit einem CAS fordert weniger syntaktische Termumformungskompetenz, fördert aber Kompetenz im Erfassen algebraischer Strukturen und Zusammenhänge.

(2) Es wird ein tragfähiges, flexibles Variablenkonzept benötigt. Statisches Termdenken und dynamisches Funktionsdenken müssen in Beziehung gesetzt werden. Die Arbeit mit einem CAS erfordert dann mehr funktionales Denken.

(3) Die Möglichkeit der freien Definition mehrstelliger Funktionen schafft schülerbezogene Gestaltungs- und Untersuchungsmöglichkeiten. Die Arbeit mit einem CAS erfordert dann mehr algorithmisches Denken.

Zu (1): Die pq-Formel

Quadratische Zusammenhänge und damit einhergehende Lösungen von zugehörigen Gleichungen treten in so vielen Verwendungszusammenhängen auf, dass eine Kenntnis und Fertigkeit im Lösen notwendig einzufordern ist. Im technikfreien Unterricht ist dann die Anwendung der pq-Formel oder auch das sukzessive Lösen mit quadratischer Ergänzung das zweckmäßigste Verfahren und als sichere Basiskompetenz einzufordern. Die Verfügbarkeit grafischer Werkzeuge relativiert hier ein erstes Mal: Wer in Anwendungskontexten an konkreten Lösungen interessiert ist, wird mit schnell erzeugbaren grafischen Lösungen (Nullstellen von Parabeln) hinreichend zufrieden sein, Anwendungskontexte erzwingen sowieso Näherungslösungen. Mit einem CAS kommt es zu einer zweiten Relativierung: Wer eine exakte Lösung braucht, erhält sie auf Knopfdruck, auch die pq-Formel selbst. Der Nutzer muss allerdings den Ausdruck und die Termstruktur erfassen, denn zu einem ‚aufklärenden’ Mathematikunterricht gehört auch der verständige Nachvollzug der Genesis der Formel. Dies führt zu einer massiven Verschiebung der Ziele für die Behandlung der pq-Formel: An die Stelle der sicheren Erzeugung von Lösungen zu Fuß („Generieren“) tritt der verständige, Einsicht schaffende Einblick und Umgang mit der Formel („Prozessieren“), Algebra dient der Einsicht, weniger der Erzeugung von Lösungen. Erst wenn erfasst ist, wie sich z. B. die Symmetrie der Parabeln in der Lösungsformel widerspiegelt, wie $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ mit dem Scheitelpunkt $(-\frac{p}{2}|-\frac{p^2}{4}-q)$ zusammenhängt, entsteht verständiges Wissen um quadratische Zusammenhänge und dies ist das entscheidende Motiv für die Behandlung der pq-Formel und quadratischer Ergänzung. Da die Lösungen mit einem CAS auf Knopfdruck erscheinen, wird ein möglichst vorgängiges Erfassen der Gleichungsstruktur wichtiger, Schüler sollten erfassen, dass $\frac{1}{x} = 2x - 8$ auf eine quadratische Gleichung führt, $\frac{1}{x^2} = 2x - 8$ aber nicht. Gibt ein CAS keine exakte Lösung der zweiten Gleichung an, sollte dies im Unterricht angesprochen werden. Das Reden über Terme gewinnt, das Manipulieren von Termen verliert an Bedeutung.

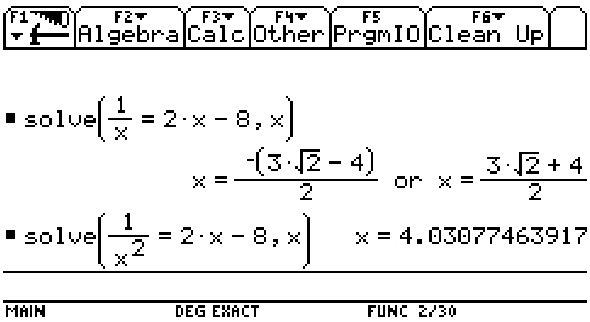


Abbildung 1: *Gleichungen lösen mit CAS.*

Das Lösen quadratischer Gleichungen mit einem CAS zeigt, wie Technologie traditionelle inhaltliche Schwerpunktsetzungen verändern kann (und dann auch sollte) und welchen Stellenwert händische Verfahren dann noch haben. Verallgemeinernd gilt: Die algebraischen Fertigkeiten eines CAS führen zu einem qualitativen und quantitativen Wandel in der Bedeutung und Funktion händischer Verfahren. Sie dienen weniger dazu, eine Lösung zu finden, sondern sollen vielmehr Einsicht in prinzipielle Lösungsmöglichkeiten geben und Transparenz schaffen. Das CAS bietet die Möglichkeit, Kompetenzen im Wechselspiel aus ‚Technikeinsatz' und ‚Lösung von Hand' zu erzeugen, eine undialektische Gegenüberstellung von ‚händisch' und ‚mit Technik' greift jedoch zu kurz und verspielt produktive Möglichkeiten.

Zu (2): Mehrstellige Funktionen statt am Beispiel mehrstelliger Funktionen

Ein grundlegendes Merkmal von CAS ist die Möglichkeit, Formeln als Funktionen zu definieren und diese dann als Makros in Problembearbeitungen einzusetzen.

2.1 Formeln der Geometrie als Funktionen

Wenn schon früh Formeln auch explizit als Funktionen eingeführt werden, z. B. die Flächenformel eines Dreiecks als $A(g,h) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$, dann findet die wichtige Vernetzung von Formeln und Funktionen entsprechend frühzeitig und explizit statt. Wenn man $F(r) = \pi \cdot r^2$ statt $F = \pi \cdot r^2$ lernt, ist der kovariante Zusammenhang augenscheinlich und heuristisch produktiv. Das Anwenden von Formeln für Flächeninhalte sollte also durch funktionale Betrachtungen und entsprechende Implementierung im CAS ergänzt werden, das CAS wird so zur dynamischen Formelsammlung. Neben die klassische Darstellung der Formel in ihrem syntaktischen Aufbau tritt die Darstellung als Funktion ($\frac{1}{2} \cdot g \cdot h \leftrightarrow A(g,h)$). Letztere ermöglicht dann Untersuchungen mit entsprechenden grafisch-tabellarischen Verfahren indem ein Parameter zum Argument der Funktion wird.

2.2 Ein Klassiker: Die Zinsformel $K(t,p,A) = A \cdot (1 + \frac{p}{100})^t$

Typische Fragen im Kontext dieser Formel können folgende sein:

- Wie entwickelt sich ein Kapital von 5000€, das mit 3% jährlich verzinst wird? Wann sind es 8000€?
- Was passiert mit unterschiedlichem Anfangskapital A, wenn es über 5 Jahre mit 3% verzinst wird? Natürlich kann man hier tabellarisch Beispiele durchrechnen und dann entdecken, dass das Kapital um ca. ein Drittel angewachsen ist. Mit funktionaler Brille sieht man aber sofort die Proportionalität:

$$K(A) = (1 + \frac{3}{100})^{10} \cdot A \approx 1{,}3439 \cdot A.$$

- Wie entwickelt sich ein Kapital von 5000€ in 10 Jahren in Abhängigkeit des Zinssatzes? Für eine Ausbildung und Schärfung solcher Zusammenhänge helfen grafische Darstellungen (vgl. Abb. 2). Die produktive Heuristik „Variiere einen Parameter, lasse die übrigen fest", liefert Einsicht in Kovarianzen und Änderungen bei Variationen von Parametern.

Geraden, Parabeln, Potenz- und Exponentialfunktionen haben ihren Auftritt und schärfen den Blick. Denn bei b) könnte man nach der Grafik auch Exponentialfunktionen vermuten. Genaueres Hinschauen („Zoomen") oder Termkompetenz klären aber auf. Wieder wird syntaktische Umformungskompetenz durch grafisch-tabellarisches Prozessieren mit Formeln ersetzt. An die Stelle von Termumformungskompetenz tritt ‚Funktionskompetenz'.

2.3 Binomialverteilung

Die Formel für die Binomialverteilung kann wie in den vorangestellten Beispielen von Schülern als dreistellige Funktion erzeugt und zur Beantwortung von diesbezüglichen Fragen benutzt werden. Das zweite und dritte Ergebnis machen allerdings stutzig. 5000 ist der Erwartungswert und hat die höchste Wahrscheinlichkeit, die zwar kleiner als die vorher bestimmte ist, aber sicher nicht 0 und auch nicht undefiniert. Was ist passiert? Der im CAS implementierte Befehl (Binompdf) leistet dagegen das Erwartete.

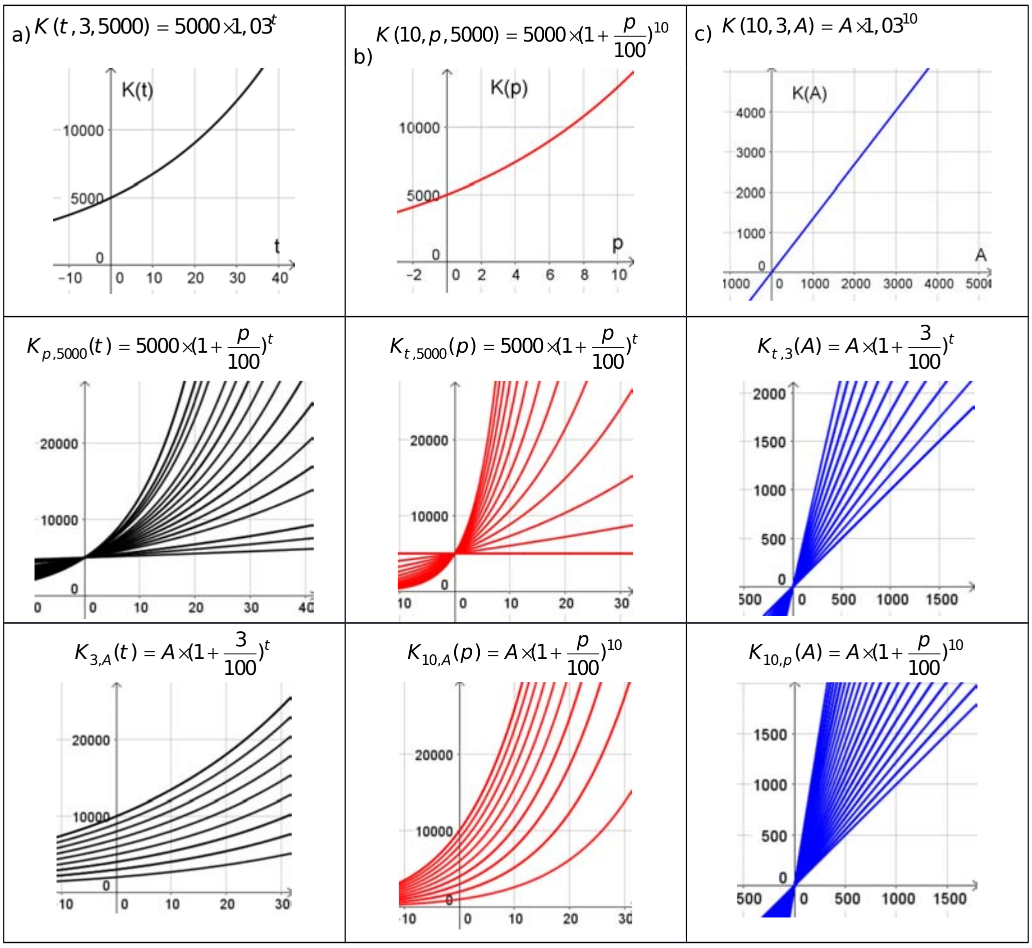


Abbildung 2: *Grafische Darstellungsmöglichkeiten der Zinsformel*

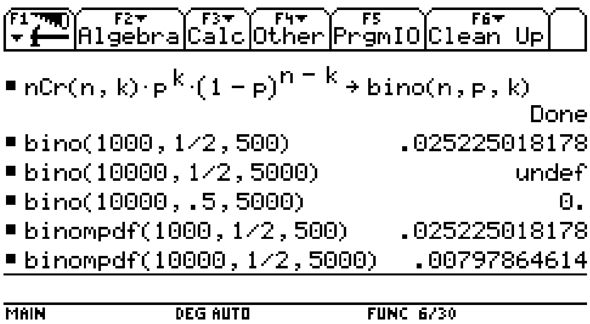


Abbildung 3: *Experimente mit Binomialverteilungen.*

Dies kann ein Beispiel dafür sein, wie das Arbeiten mit einem CAS nicht Mathematik verhindert sondern anregt. Das falsche Ergebnis von „bino“ regt zur Reflexion auf die Struktur der Formel an und man erfasst: Hier werden sehr kleine Zahlen mit sehr großen Zahlen multipliziert. Dies kann zu numerischen Katastrophen bzw. Stellenauslöschung führen. 0,5 und 1/2 sind für das CAS auch nicht dasselbe. In diesem Zusammenhang entsteht die Einsicht, dass es bessere Verfahren (z. B. rekursive) gibt.

Zu (3): Algorithmisches Arbeiten mit mehrstelligen Funktionen

Erarbeitete Formeln können von Schülerinnen und Schülern selbsttätig implementiert werden und dann für komplexere Probleme als Werkzeug benutzt werden. Damit werden die Fertigkeiten des CAS enorm erweitert. Es ist gerade diese Offenheit des CAS, die einen wesentlichen didaktischen Gehalt ausmacht und ein solches Werkzeug so wirkmächtig macht, denn erst in der spezifischen ‚Einrichtung’ des Geräts durch den Nutzer kann sich die Produktivität voll entfalten.

3.1 Änderungsraten/Ableitung

Definiert man die durchschnittliche Änderungsrate als zweistellige Funktion $msek(a,h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, steht ein Werkzeug für die Beschreibung von Änderungen zur Verfügung, das durchgehend in dynamischer Art und Weise grafisch-tabellarisch mit einem CAS genutzt werden kann. Wenn man hier a festhält und h variiert, kann näherungsweise die lokale Änderung an einer Stelle berechnet werden (lokaler Aspekt), hält man h fest und variiert a, kann das lokale Änderungsverhalten für variable Argumente näherungsweise grafisch-tabellarisch untersucht werden (globaler Aspekt).

Zu beachten ist: Die für $h = 0$ entstehende Sekantenfolge ist hier jetzt eine Schar paralleler Geraden und nicht, wie im klassischen Vorgehen, ein Geradenbüschel durch den zu untersuchenden Punkt P. Es wird allein mit dem Konzept „mittlere Änderungsrate" so flexibel gearbeitet, dass damit alle Fragen zum Änderungsverhalten mit hinreichender Genauigkeit beantwortet werden können. Man erhält vom Nutzer gesetzte Genauigkeiten für gesuchte Werte in Anwendungskontexten, kann aber auch das für Grenzprozesse hier konstitutive Dilemma erleben, dass das, was man eigentlich möchte nicht geht ($h = 0$) und das, was geht, eigentlich das ist, was man nicht möchte. Die Dynamisierung des Differenzenquotienten mit dem CAS fördert und festigt adäquate Grundvorstellungen zum Änderungsverhalten, ist gleichzeitig ein heuristisches Werkzeug zum Entdecken von Zusammenhängen und bereitet neuartige Begriffsbildung (Grenzwert) vor, indem der infinitesimale Prozess durch sukzessives Durchlaufen mit unterschiedlichen Parameterwerten erlebbar wird. Es wird anderseits aber auch deutlich, dass die begriffliche Weitung zum Grenzwert nicht notwendig ist, wenn es allein um das Berechnen hinreichend ‚akzeptabler' Werte geht, dass „Grenzwertbildung" ein kognitiver Prozess ist, seine Motivierung also eine innermathematische! Also hilft die Sekantensteigungsfunktion nicht mehr weiter. Terme müssen untersucht werden, Algebra kommt ins Spiel, es müssen Differenzenquotienten für konkrete Funktionen aufgestellt und berechnet werden.

Damit ist ein umittelbares Motiv für eine genauere Untersuchung gegeben, die h-Methode entsteht, aus msek(x, h) wird durch einen gedanklichen Übergang $f'(x)$. Die Ausgabe des CAS kann Motiv für eigene Suche und Aufklärung sein. Will man nun mit den CAS-Ausdrücken den Grenzübergang mit der h-Methode vollziehen, gelingt es unmittelbar nur bei den ersten beiden Beispielen in Abb. 5, bei den übrigen nicht (eine Einbettung in ein durchgehendes Konzept zum Analysisunterricht gibt [2]).

3.2 Mehrschrittige Algorithmen als Formeln

Neben Formeln können auch Algorithmen als mehrstellige Funktionen im CAS definiert werden. Das sukzessive Abarbeiten eines Kalküls wird dann durch eine gezielte Belegung von Argumenten ersetzt (Abb. 6).

a) Gerade durch zwei Punkte (xp—yp) und (xq—yq)

b) Abstand eines Punktes von einer Ebene: „PKEB(vp,vn,d)"

c) Tangente von $y1(x)$ an der Stelle t

d) Trapezsumme für $y1(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ mit n Intervallen: „TRAPEZ(a,b,n)"

Die Beispiele zeigen, dass im Verlauf des Unterrichts Schülerinnen und Schüler im CAS eine Formelsammlung erzeugen können, die einen dynamisch, situativen Gebrauch der Formeln gestattet und sie damit zu einem produktiven Werkzeug macht. Die eigene ‚Programmierung' solcher Formeln setzt aber immer die algebraische Herleitung mit Variablen voraus, so dass die Lernenden unmittelbar die Produktivität und den Mehrwert des Arbeitens mit Variablen und zugehöriger Algebraisierungen erleben können. Grundlegende Fähigkeit beim Arbeiten mit solchen selbst definierten Makros ist die Substitution, die im Grunde schon beim Arbeiten mit den eingebauten Befehlen erforderlich ist. Diese sind eben auch mehrstellige Funktionen, bei deren Anwendung vorgegebene Argumente zielgerecht substituiert werden müssen (solve(Gleichung, Variable)). Unabhängig von allen inhaltsbezogenen Argumenten für das Arbeiten mit selbstdefinierten, mehrstelligen Funktionen, liegt ein weiteres Argument für die Thematisierung dieser Aspekte in der Aufklärung über die Arbeitsweise benutzter Technik. Im CAS gibt es vielfältige, entsprechend vordefinierte Funktionen, deren Erzeugung auf diese Weise durchsichtig gemacht wird. DOTP(Vektor1,Vektor2) (Skalarprodukt) kann ein Schüler auf einfache Weise dann selbst erzeugen. Die Beispiele zeigen weiterhin, dass es zentral um die Entwicklung einer instrumentellen Wechselbeziehung zwischen digitalem Werkzeug und Schüler geht. „Technologische Kompetenz" heißt dann, dass inhalts- bzw. prozessorientierte Kompetenzen im Dialog mit diesen Werkzeugen erworben werden. Nicht zuletzt zeigen langjährige Unterrichtserfahrungen aber auch: So wie einerseits CAS eine gewisse händische Übungsvielfalt und –tiefe obsolet macht, so erzwingt es andererseits auch umgekehrt gewisse händische Fertigkeiten und Fähigkeiten (Kopfrechnen, Schätzen, Erfassen von Termstrukturen), die ohne CAS vielleicht von geringerer Bedeutung waren. Die durch ein CAS bedingte Beschleunigung bei der Ausführung der Kalküle erzwingt dann, fast dialektisch, eine entsprechende Entschleunigung im händischen Erstzugang. Dies sei abschließend als erstes Axiom technologiegestützten Unterrichts formuliert: Je mehr Technologien in inner- und außermathematischen Anwendungssituationen im Unterricht mit verfahrensbeschleunigenden Effekten eingesetzt werden, desto notwendiger ist eine entschleunigende, verstehensorientierte vorgängige, meist rechnerfreie, Einführung.

Literatur

[1] H. Körner CAS im Mathematikunterricht – Was bleibt? Was ändert sich?. *MU* (60) 1/2014, S.16-29.

[2] H. Körner Vom Bestand zur Änderung und zurück – Ein Konzept für die Analysis. in: Heintz, G., Pinkernell, G., Schacht, F. (Hrsg.): *Digitale Werkzeuge für den Mathematikunterricht*, Festschrift für Hans-Jürgen Elschenbroich, Neuss 2015.

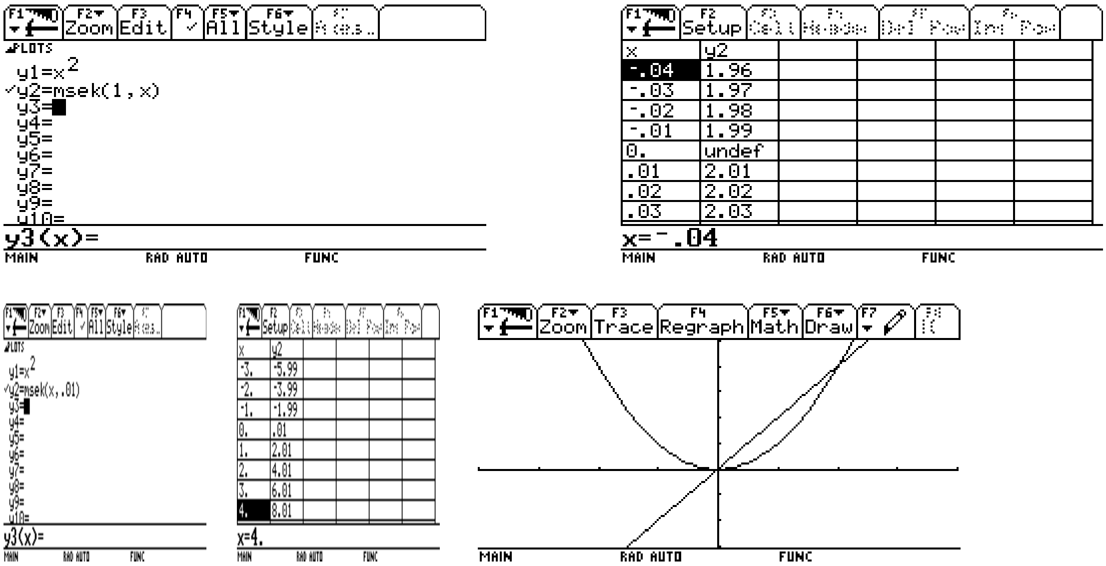


Abbildung 4: *Lokale Änderung an der Stelle x=1: msek(1,x) und die Änderungsratenfunktion (Ableitung): msek(x,0.01)*

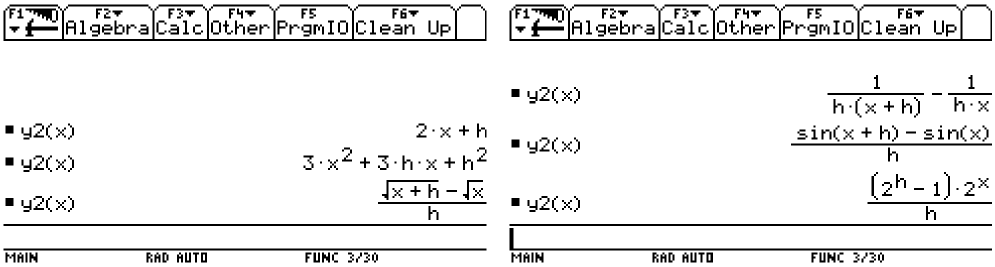
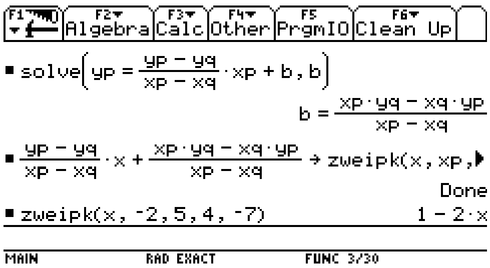
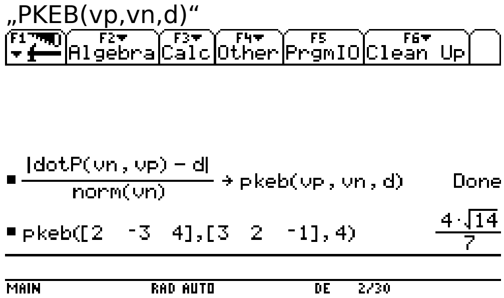


Abbildung 5: *y2(x) als die Sekantensteigungsfunktionen zu y1(x)*

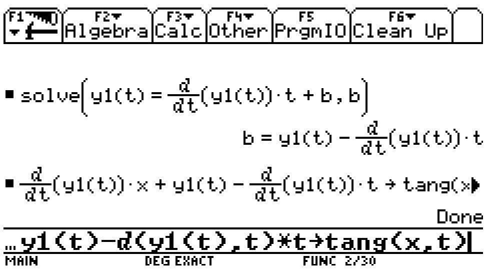
a) Gerade durch zwei Punkte (xp|yp) und (xq|yq)



b) Abstand eines Punktes von einer Ebene: „PKEB(vp,vn,d)“



c) Tangente von *y1(x)* an der Stelle t



d) Trapezsumme für y1(x) von x=a bis x=b mit *n* Intervallen: „TRAPEZ(a,b,n)“

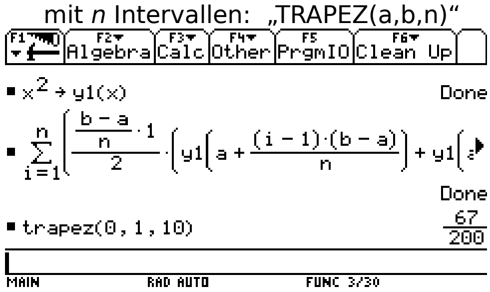


Abbildung 6: *Mehrschrittige Algorithmen*