Mengenwertige Lösungskonzepte in Spieltheorie und Social-Choice-Theorie*

Markus Brill

Institut für Informatik
Technische Universität München
brill@in.tum.de

Abstract: Meine Arbeit beschäftigt sich mit mengenwertigen Lösungskonzepten aus der Spieltheorie und der Social-Choice-Theorie. Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Berechnungskomplexität von Lösungskonzepten. Insbesondere werden komplexitätstheoretische Fragestellungen im Kontext von Normalform-Spielen, Wahlverfahren und Turnierlösungen betrachtet. Außerdem werden die Manipulierbarkeit mengenwertiger Wahlverfahren sowie axiomatische Aspekte von Lösungskonzepten untersucht.

1 Einleitung

Spieltheorie und Social-Choice-Theorie sind Teilgebiete der theoretischen Wirtschaftswissenschaften und haben in den vergangenen zwei Jahrzehnten innerhalb der Informatik stark an Bedeutung gewonnen. In beiden Bereichen geht es darum, Entscheidungen auf der Grundlage von Präferenzen zu treffen. Die Akteure der Entscheidungssituation werden üblicherweise als *Agenten* bezeichnet. Ein Agent ist eine autonome Entität, der Präferenzen über mögliche Ergebnisse zugeschrieben werden können. Das kann ein Mensch, eine Organisation, oder ein Computerprogramm sein. Kompliziert – und interessant – werden Entscheidungssituationen erst dann, wenn mehrere Agenten beteiligt sind.

Die *Spieltheorie* untersucht Situationen, in denen das Wohlergehen eines Agenten nicht nur von seinen eigenen Aktionen, sondern auch von den Aktionen der anderen Agenten abhängt. Ihre Anfänge hat die Spieltheorie in der Analyse von Gesellschaftsspielen; mittlerweile hat sie sich zu einem wichtigen Gebiet mit zahlreichen Anwendungen in den Sozialwissenschaften entwickelt.

Die *Social-Choice-Theorie* (am ehesten als *Theorie kollektiver Entscheidungen* zu übersetzen) betrachtet die Frage, wie eine Gruppe von Agenten eine gemeinsame Entscheidung treffen kann, die alle Mitglieder der Gruppe betrifft. Im allgemeinsten Fall gibt es eine Menge von möglichen Alternativen und jeder Agent hat Vorlieben über diese, meist ausgedrückt in Form einer Präferenzliste. Social-Choice-Theorie ist ein stark interdiszi-

*Englischer Titel der Dissertation: “Set-Valued Solution Concepts in Social Choice and Game Theory: Axiomatic and Computational Aspects”.

plinär geprägtes Forschungsgebiet, zu dem unter anderem Mathematiker, Wirtschaftswissenschaftler, Politikwissenschaftler und Psychologen Beiträge geleistet haben.

Die wichtigsten Untersuchungsgegenstände von Spieltheorie und Social-Choice-Theory sind sogenannte *Lösungskonzepte*. In der (nicht-kooperativen) Spieltheorie modelliert ein Lösungskonzept rationales Verhalten. Für eine gegebene Spezifizierung einer Entscheidungssituation gibt ein Lösungskonzept jedem Agenten eine Handlungsempfehlung, die das Wohlergehen des Agenten maximiert. Dieser präskriptiven Interpretation wird oft eine deskriptive Perspektive gegenüber gestellt, die die Rolle von Lösungskonzepten bei der Vorhersage rationalen Verhaltens betont.

In der Social-Choice-Theorie hingegen versteht man unter Lösungskonzepten Verfahren zur Bündelung von Präferenzen. Wahlverfahren sind ein typischens Beispiel. Ein Lösungskonzept bildet die individuellen Präferenzen der einzelnen Agenten entweder auf eine oder mehrere Alternativen (die „Gewinner") oder auf eine aggregierte Präferenzliste ab. Zum Vergleich verschiedener Lösungskonzepte werden oft Fairnesskriterien, sogenannte *Axiome*, herangezogen. Ein einfaches Beispiel für ein solches Axiom ist die Forderung, dass alle Agenten gleich behandelt werden sollen. Auch in der Social-Choice-Theorie kommt spieltheoretischen Überlegungen eine wichtige Rolle zu. Eine grundlegende Frage ist beispielsweise, ob Agenten das vom Lösungskonzept ausgewählte Ergebnis zu ihren Gunsten beeinflussen können, indem sie falsche Angaben zu ihren Präferenzen machen. Da dieses Phänomen im Allgemeinen unerwünscht ist, wird neben der Einhaltung einer Reihe von Fairnessaxiomen üblicherweise auch eine gewisse Immunität eines Lösungskonzepts gegenüber solchen „strategischen Manipulationen" gefordert.

Ein Lösungskonzept heißt *mengenwertig*, wenn die Möglichkeit besteht, dass mehr als eine Handlungsempfehlung bzw. Alternative ausgewählt wird. Aus mathematischer Sicht sind mengenwertige Lösungskonzepte oftmals eleganter, vor allem weil sie nicht auf ein willkürliches Tie-Breaking angewiesen sind. Die Interpretation mengenwertiger Lösungskonzepte ist nicht offensichtlich: Letzten Endes muss aus der Menge eine eindeutige Auswahl getroffen werden; wie diese endgültige Auswahl zu geschehen hat, wird von einem mengenwertigen Lösungskonzept allerdings nicht spezifiziert. Der Fokus eines mengenwertigen Lösungskonzeptes liegt daher eher auf dem Aussortieren unerwünschter Alternativen als auf der endgültigen Auswahl einer einzigen „optimalen" Alternative.

In den vergangenen Jahren hat die Bedeutung *algorithmischer* Eigenschaften von Lösungskonzepten sowohl in der Spieltheorie als auch in der Social-Choice-Theorie stetig zugenommen. Diese Entwicklung wird häufig mit dem Schlagwort *Algorithmic Economics* zusammengefasst und mit dem Aufkommen des Internets in Zusammenhang gebracht. In der Tat kann man das Internet als einen großen Marktplatz sehen, auf dem viele Agenten mit unterschiedlichen Interessen interagieren. Diese Sichtweise legt den Einsatz von Konzepten und Techniken nahe, die in Spieltheorie und Social-Choice-Theorie entwickelt wurden. In der Folge sind zwei interdisziplinäre Forschungsgebiete an der Schnittstelle zwischen Informatik und Wirtschaftswissenschaften entstanden: *Algorithmische Spieltheorie* und *Computational Social Choice* (Abb. 1).

Der Ideenaustausch zwischen der algorithmischen und der wirtschaftswissenschaftlichen Perspektive erfolgt in beide Richtungen. Einerseits werden strategische Überlegungen und

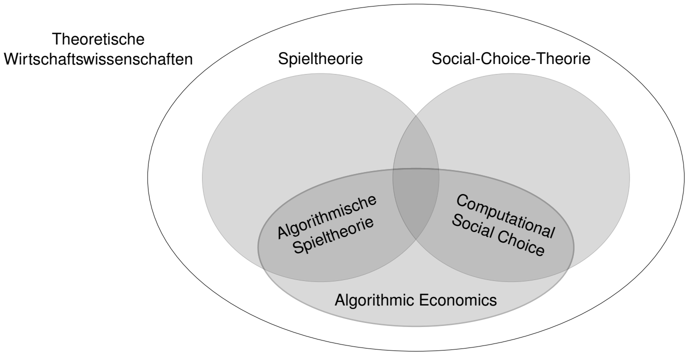

Abbildung 1: Einordnung der Gebiete *Algorithmische Spieltheorie* und *Computational Social Choice*

Fairnessaxiome beispielsweise beim Design von Multiagentensystemen berücksichtigt. Andererseits helfen Ansätze und Techniken aus der Informatik dabei, in der Spieltheorie und Social-Choice-Theorie auftretende Phänomene besser zu verstehen. Ein gutes Beispiel für die letztgenannte Richtung findet sich in der umfangreichen Literatur zum Thema *Berechnungskomplexität von Lösungskonzepten*. Die Motivation solcher Fragestellungen ist naheliegend: Ohne einen effizienten Algorithmus zur Berechnung der Lösung ist selbst das schönste Lösungskonzept mehr oder weniger nutzlos. Bei spieltheoretischen Lösungskonzepten hängt die Berechnungskomplexität sogar direkt mit der Plausibilität des Konzeptes als einem Mittel zur Vorhersage des Ergebnisses zusammen. Wieso sollten sich rationale Agenten entsprechend eines Lösungskonzeptes verhalten, wenn Lösungen nicht in vernünftiger Zeit berechnet werden können?

2 Spieltheorie

Algorithmische Spieltheorie hat sich mittlerweile als wichtiges Forschungsgebiet innerhalb der Informatik etabliert (siehe z. B. den Übersichtsartikel [Rou10]). Das wohl prominenteste Resultat betrifft die Berechnungskomplexität von Nash-Gleichgewichten, dem zweifelsohne wichtigsten spieltheoretischen Lösungskonzept. Während Nash-Gleichgewichte in Matrixspielen (2-Personen-Nullsummenspiele) noch effizient berechnet werden können, haben Daskalakis et al. gezeigt, dass das Problem bereits in allgemeinen 2-Personen-Spielen PPAD-vollständig ist. Dieses und ähnliche Resultate haben nicht zuletzt die Suche nach alternativen spieltheoretischen Lösungskonzepten mit angenehmeren algorithmischen Eigenschaften inspiriert. Die mengenwertigen Lösungskonzepte, die ich im Rahmen meiner Arbeit untersuche, stellen solche Alternativen zum Nash-Gleischgewicht dar. Diese Konzepte beruhen auf verschiedenen Varianten von Dominanz. Eine *Dominanzart* formalisiert, wann eine Aktion besser als eine andere Aktion desselben Spielers ist. Beispielsweise dominiert eine Aktion x eine Aktion y bzgl. *strikter Dominanz*, falls das Ergebnis für den Spieler bei der Wahl von x immer strikt besser ist als das Ergebnis bei der Wahl von y, unabhängig von den Aktionen der anderen Spieler.

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	5	3	4	6
a_2	2	4	5	3
a_3	4	2	6	1
a_4	1	3	0	7

Abbildung 2: Ein Matrixspiel mit Aktionen a_1, a_2, a_3, a_4 für den Zeilenspieler und Aktionen b_1, b_2, b_3, b_4 für den Spaltenspieler. Das Paar $(\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\})$ ist ein Sattel des Spiels, da jede der vier Nicht-Sattel-Aktionen a_3, a_4, b_3, b_4 jeweils von einer Sattel-Aktion strikt dominiert wird, falls der andere Spieler nur Sattelaktionen spielt. Interne Stabilität und Minimalität lassen sich ebenfalls leicht überprüfen.

2.1 Algorithmen für dominanzbasierte Lösungskonzepte

Der Wirtschafts-Nobelpreisträger Lloyd Shapley hat bereits in den frühen 1950er Jahren eine Alternative zum Nash-Gleichgewicht in Matrixspielen vorgeschlagen, das *minimale Mengen* von Aktionen anstatt Randomisierungen als Lösungen zulässt. Shapley definiert einen *verallgemeinerten Sattelpunkt* (VSP) als ein Tupel von Teilmengen von Aktionen eines jeden Spielers, das *extern stabil* ist: falls die anderen Spieler lediglich Aktionen aus ihren jeweiligen Teilmengen wählen, so ist jede Aktion außerhalb der Teilmenge von einer Aktion innerhalb der Teilmenge strikt dominiert. Ein VSP ist minimal, falls er keinen anderen VSP enthält. Minimale VSPs, von Shapley *Sattel* genannt, sind auch *intern stabil* in dem Sinne, dass keine Aktion in der Teilmenge eines Spielers von einer anderen Aktion in der Teilmenge strikt dominiert wird – wiederum unter der Voraussetzung, dass alle anderen Spieler nur Aktionen aus ihren Teilmengen wählen. Abb. 2 zeigt ein Beispiel.

Duggan und Le Breton haben den Ansatz von Shapley auf Normalform-Spiele und auf verschiedene Arten von Dominanz erweitert, indem sie ein *D-set* als ein minimales Tupel von Teilmengen von Aktionen definieren, das intern und extern stabil bzgl. einer Dominanzart D ist. Auf diese Weise erhält man eine Vielzahl von interessanten mengenwertigen Lösungskonzepten. Neben den von Shapley eingeführten Satteln lassen sich etwa auch die *primitive formations* von Harsanyi und Selten sowie die *CURB sets* von Basu und Weibull als D-sets für ein geeignetes D darstellen.

In meiner Arbeit beschäftige ich mich zunächst mit der Frage, wie viele D-sets ein Spiel haben kann und unter welchen Bedingungen verschiedene Dominanzarten zu dem gleichen Lösungskonzept führen. Für strikte Dominanz (S) hat Shapley die Eindeutigkeit von S-sets in Matrixspielen gezeigt. Duggan und Le Breton bewiesen das analoge Resultat für schwache Dominanz (W) und sehr schwache Dominanz (V) in Konfrontationsspielen, einer Teilklasse von Matrixspielen. Ich identifiziere viele weitere Klassen von Spielen, in denen D-sets für bestimmte D eindeutig sind. Andererseits zeige ich, dass für manche Dominanzarten selbst sehr eingeschränkte Spielklassen eine in der Größe des Spiels exponentielle Anzahl von Lösungen haben können.

<table>
<tr><th></th><th>S</th><th>B</th><th>S^*</th><th>C_d</th><th>C</th><th>V</th><th>V^*</th></tr>
<tr><td>Normalform-Spiele</td><td>poly</td><td>poly</td><td>poly</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="3">exp</td><td rowspan="4">exp</td></tr>
<tr><td>Matrixspiele</td><td rowspan="4">eind.</td><td rowspan="3">eind.</td><td rowspan="3">eind.</td></tr>
<tr><td>symmetrische Matrixspiele</td><td>eind.</td><td>eind.</td></tr>
<tr><td>Konfrontationsspiele</td><td colspan="3">eindeutig</td></tr>
<tr><td>Turnierspiele</td><td colspan="2">eindeutig</td><td colspan="4">eindeutig</td></tr>
</table>

Tabelle 1: Resultate zur Anzahl und Berechnungskomplexität von D-sets. Für eine gegebene Dominanzart D und eine Klasse von Spielen (per Mengeninklusion geordnet) enthält die Tabelle Angaben über die Anzahl der D-sets (eindeutig, polynomiell oder exponentiell). Für alle dunkelgrau hinterlegten Zellen findet der Greedy-Algorithmus alle D-sets in polynomieller Zeit. Für die hellgrau hinterlegten Zellen findet der fortgeschrittene Algorithmus das eindeutige D-set. Zellen, die sich über mehrere Spalten erstrecken, zeigen an, dass die entsprechenden D-sets in der jeweiligen Spielklasse übereinstimmen. Die Dominanzarten C_d und C sind nur in symmetrischen Matrixspielen definiert. Die Dominanzart W wurde nicht betrachtet, da es Spiele ohne W-sets gibt.

Anschließend betrachte ich die Berechnungskomplexität von D-sets. Neben den bereits erwähnten Dominanzarten S und V betrachte ich deren gemischte Varianten S^* und V^*, *Börgers-Dominanz* (B), *covering* (C) und *deep covering* (C_d). Ich schlage zwei generische Algorithmen zur Berechnung von D-sets vor: einen Greedy-Algorithmus und einen „fortgeschrittenen" Algorithmus. Anschließend werden für beide Algorithmen abstrakte Eigenschaften definiert, die – falls sie für eine gegebene Dominanzart in einer gegebenen Spielklasse erfüllt sind – die Korrektheit und Effizienz des jeweiligen Algorithmus garantieren. Mit diesem Ansatz erhalte ich dann für jede betrachtete Kombination aus Dominanzart und Spielklasse einen effizienten Algorithmus zur Berechnung *aller* D-sets eines Spiels – mit Ausnahme derer Kombinationen, für die die Anzahl von D-sets exponentiell sein kann. Interessanterweise basieren die fortgeschrittenen Algorithmen auf der wiederholten Berechnung von Nash-Gleichgewichten mittels linearer Optimierung. Dies ist bemerkenswert, da die resultierenden mengenwertigen Lösungen wenig mit Nash-Gleichgewichten gemein haben. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 zusammengefasst.

2.2 Härteresultate für dominanzbasierte Lösungskonzepte

Die Algorithmen aus Abschnitt 2.1 funktionieren für viele, aber nicht für alle betrachteten Dominanzarten. Zum Beispiel zeigt Tabelle 1, dass selbst ein symmetrisches Matrixspiel exponentiell viele V-sets und V^*-sets haben kann. Gleiches gilt für W-sets und W^*-sets. Es kann also keinen effizienten Algorithmus geben, der für eines dieser Konzepte alle Lösungen (explizit) berechnet. Nichtsdestotrotz bleiben einige natürliche Komplexitätsfragen offen. Man kann beispielsweise fragen, ob man *eine* Lösung schnell finden kann oder ob eine Lösung mit bestimmten Eigenschaften existiert. Fragen dieser Art untersuche ich in meiner Arbeit für schwache (W) und für sehr schwache (V) Dominanz. Da W-sets nicht immer existieren, betrachte ich *schwache Sattel*, eine Variante von W-sets, deren Existenz dadurch garantiert ist, dass lediglich externe Stabilität gefordert wird. Sowohl für V-sets als auch für schwache Sattel beweise ich eine Reihe von Härteresultaten. Beispielsweise ist das Suchproblem „Finde eine Lösung“ für beide Konzepte NP-schwer. Darüberhinaus ist es sogar Θ_2^p-schwer zu entscheiden, ob ein schwacher Sattel existiert, der eine gegebene Aktion enthält. Das bedeutet, dass dieses Entscheidungsproblem vermutlich nicht einmal in NP enthalten ist. Für V-sets ist das analoge Problem sowohl NP-schwer als auch coNP-schwer.

2.3 Iteriertes Löschen von dominierten Aktionen

Neben D-sets und schwachen Satteln untersuche ich eine weitere Klasse von dominanzbasierten Lösungskonzepten. Diese Klasse hat in der Spieltheorie eine lange Tradition und ist durch das iterierte Löschen von dominierten Aktionen definiert. Für eine gegebene Dominanzart D sucht man in jedem Schritt Aktionen, die von einer anderen Aktion D-dominiert werden. Diese werden dann gelöscht und die Suche geht in dem verkleinerten Spiel weiter, so lange bis es keine D-dominierten Aktionen mehr gibt. Die verbleibenden Aktionen definieren die Lösung des Spiels. Für manche Dominanzarten wie z. B. S, S^* und B ist die so definierte Lösung eines Spiels *unabhängig* von der Reihenfolge der Löschungen. Für andere, wie beispielsweise W, ist das nicht der Fall.

In meiner Arbeit analysiere ich das iterierte Löschen von W-dominierten Aktionen komplexitätstheoretisch. Für das Problem der Eliminierbarkeit gegebener Aktionen in Matrixspielen gebe ich einen nicht-trivialen effizienten Algorithmus an. Andererseits zeige ich, dass eine Reihe natürlicher Probleme bereits in sehr eingeschränkten Spielklassen NP-vollständig ist. Beispielsweise ist es bereits in Matrixspielen schwer zu entscheiden, ob ein gegebenes Teilspiel durch eine Löschungssequenz erreicht werden kann. Dieses Resultat ist besonders bemerkenswert, da Härteresultate für Matrixspiele sehr selten sind.

3 Wahlverfahren

Computational Social Choice ist auf dem Weg, sich ähnlich wie algorithmische Spieltheorie an der Schnittstelle zwischen Wirtschaftswissenschaften und Informatik zu etablieren. Diverse Übersichtsartikel dokumentieren das gestiegene Interesse, das diesem jungen Forschungsgebiet zuteil wird [Con10, FHH10].

Man kann sich ein Lösungskonzept aus der Social-Choice-Theorie als ein *Wahlverfahren* vorstellen, das für eine gegebene Menge von Präferenzlisten („Stimmzetteln“) eine Menge von Alternativen als *Gewinner* auswählt. Agenten werden in diesem Kontext *Wähler* genannt. Abb. 3 (links) zeigt eine typische Instanz eines Social-Choice-Problems, ein sogenanntes *Präferenzprofil*. Die Zahlen über der horizontalen Linie geben an, wie viele Wähler die der Spalte entsprechenden Präferenzen haben. In dem Beispiel haben drei

3	4	3	4	1
a	d	a	c	d
b	c	b	b	a
c	a	d	d	b
d	b	c	a	c

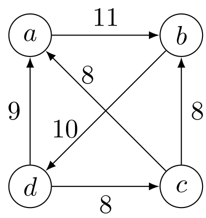

Abbildung 3: Präferenzprofil mit 15 Wählern und 4 Alternativen a, b, c, d (links) und zugehöriger gewichteter Mehrheitsgraph (rechts)

Wähler die Präferenzen $a \succ b \succ c \succ d$, vier Wähler die Präferenzen $d \succ c \succ a \succ b$ usw. Für jedes Präferenzprofil kann man den *gewichteten Mehrheitsgraphen* aufstellen (Abb. 3, rechts). Die Knoten dieses Graphen sind durch die Alternativen gegeben und die Kanten zeigen die Ergebnisse der paarweisen Mehrheitsvergleiche an. Außerdem ist jede Kante mit der Anzahl der Wähler, die die entsprechende Präferenz teilen, gewichtet.

3.1 Komplexität der Gewinnerbestimmung

Das grundlegendste algorithmische Problem für ein Wahlverfahren ist die Bestimmung der Gewinner. In meiner Arbeit untersuche ich dieses Problem für drei Wahlverfahren: das von Tideman entwickelte Verfahren *Ranked Pairs* [Tid87] und die Verfahren von Young und Dodgson.

Ranked Pairs ist eines der am weitesten verbreiteten Condorcet-Verfahren und ist in seinem Ansatz sehr ähnlich zu dem Verfahren von Schulze, das unter anderem bei der Wikimedia Foundation und der Piratenpartei zur Entscheidungsfindung genutzt wird. Grundidee von Ranked Pairs ist die Konstruktion eines kollektiven Rankings, das so viel wie möglich mit den Präferenzen der einzelnen Wähler übereinstimmt. Dazu wird zunächst für jedes geordnete Paar (x, y) von Alternativen gezählt, wie viele Wähler x gegenüber y bevorzugen. Diese Zahlen entsprechen also genau den Kantengewichten in Abb. 3. Für das Paar, das diese Anzahl maximiert, wird im kollektiven Ranking die Reihenfolge fixiert. In dem Beispiel in Abb. 3 wird im ersten Schritt festgelegt, dass im kollektiven Ranking a gegenüber b bevorzugt ist. Anschließend schaut man sich die Kante mit dem nächstkleineren Gewicht an und fixiert die Relation, falls man dadurch keinen Kreis mit den bisher fixierten Paaren erzeugt. Im Beispiel wird die Kante von b nach d fixiert, die von d nach a allerdings nicht, weil sie einen Kreis mit (a, b) und (b, d) erzeugen würde. Das nächtkleinere Kantengewicht ist nicht eindeutig, weil die Kanten (c, a), (c, b) und (d, c) alle Gewicht 8 haben. In solchen Fällen schreibt Ranked Pairs vor, alle möglichen Reihenfolgen zu betrachten. Im Beispiel führt diese Vorgensweise zu zwei verschiedenen Rankings: $a \succ b \succ d \succ c$ und $c \succ a \succ b \succ d$. Ranked Pairs Gewinner sind nun alle Alternativen, die an der Spitze eines so konstruierten Rankings stehen, in unserem Fall a und c.

Obwohl Ranked Pairs ein wohlbekanntes Wahlverfahren ist, das viele wünschenswerte Eigenschaften erfüllt, war die Komplexität der Gewinnerbestimmung unbekannt. In einigen Arbeiten wurde implizit und ohne Begründung angenommen, dass das Problem in P ist. In meiner Arbeit zeige ich allerdings, dass das Problem NP-vollständig ist. Aus diesem Resultat folgen eine ganze Reihe anderer Härteresultate als Korollare, beispielsweise die NP-Schwere der Berechnung von notwendigen und möglichen Gewinnern bei unvollständig spezifizierten Präferenzen.

Für die Verfahren von Young und Dodgson zeige ich, dass das Problem der Gewinnerbestimmung Θ_2^p-vollständig ist. Für beide Resultate gibt es bereits frühere Beweise, die nicht vollständig korrekt sind und von mir adaptiert bzw. korrigiert werden.

3.2 Manipulation mengenwertiger Wahlverfahren

Die Manipulation von Wahlverfahren durch die falsche Angabe von Präferenzen ist ein gut untersuchtes Phänomen. Eines der bekanntesten Resultate der Social-Choice-Theorie, das Gibbard-Satterthwaite-Theorem, besagt im Wesentlichen, dass jedes nicht-triviale Wahlverfahren anfällig für derartige Manipulationen ist. Allerdings gilt dieses Theorem nicht für mengenwertige Wahlverfahren. Es ist daher naheliegend, sich mit der Manipulation mengenwertiger Wahlverfahren zu beschäftigen, wobei man bald feststellt, dass bereits die Definition einer Manipulation im mengenwertigen Kontext nicht unmittelbar klar ist. Wie will man schließlich entscheiden, ob ein Wähler ein Ergebnis gegenüber einem anderen Ergebnis bevorzugt, wenn beide Ergebnisse Mengen sind? Zur Beantwortung dieser Frage wurden verschiedene sogenannte *Mengenerweiterungen* definiert. Eine Mengenerweiterung erweitert eine Präferenzrelation über Alternativen auf eine Präferenzrelation über Mengen von Alternativen. Einfachstes Beispiel ist die Mengenerweiterung von Kelly, die besagt, dass ein Wähler eine Menge X gegenüber einer Menge Y genau dann bevorzugt, wenn er jedes Element von X gegenüber jedem Element von Y bevorzugt. Natürlich ist diese Mengenerweiterung sehr konservativ und erklärt viele Paare von Mengen für unvergleichbar. Deshalb wurden im Laufe der Zeit einige Verfeinerungen der Kelly-Erweiterung vorgeschlagen. Für jede gegebene Mengenerweiterung kann man nun einen entsprechenden Manipulationsbegriff definieren. Demnach ist ein Wahlverfahren manipulierbar, falls ein Wähler durch falsche Angabe seiner Präferenzen eine Gewinnermenge erreichen kann, die er bzgl. der Mengenerweiterung gegenüber der ursprünglichen Gewinnermenge bevorzugt.

In meiner Arbeit untersuche ich die Manipulierbarkeit von mengenwertigen Wahlverfahren bzgl. der Fishburn-Erweiterung und bzgl. der Gärdenfors-Erweiterung. Da beides Verfeinerungen der Kelly-Erweiterung sind, kommen nur solche Wahlverfahren als nicht-manipulierbar in Betracht, die auch bzgl. der Kelly-Erweiterung nicht manipulierbar sind. Für jedes dieser Wahlverfahren beweise ich entweder die Nicht-Manipulierbarkeit oder gebe ein konkretes Manipulationsbeispiel an. Das Besondere an meiner Vorgehensweise ist dabei, dass ich nicht jedes Wahlverfahren einzeln untersuche. Vielmehr definiere ich eine Reihe von abstrakten Eigenschaften, die – falls erfüllt – die Nicht-Manipulierbarkeit garantieren. Neben diesen hinreichenden Bedingungen identifiziere ich auch notwendige Bedingungen für die Nicht-Manipulierbarkeit. Die Bedingungen erlauben es mir, für sämtliche interessanten Verfahren die Manipulierbarkeit zu entscheiden.

4 Turnierlösungen

Ein Turnier ist ein gerichteter Graph, in dem es zwischen je zwei Knoten genau eine gerichtete Kante gibt. Eine *Turnierlösung* ist eine Funktion, die jedem Turnier eine Teilmenge seiner Knoten zuordnet. Turniere und Turnierlösungen können sowohl gewichtet als auch ungewichtet sein. Turnierlösungen spielen eine wichtige Rolle in der Social-Choice-Theorie, da viele Wahlverfahren als (gewichtete oder ungewichtete) Turnierlösung interpretiert werden können. Das liegt daran, das viele Wahlverfahren, wie beispielsweise Ranked Pairs (Abschnitt 3.1), über paarweise Vergleiche von Alternativen definiert sind. Für die Gewinnerbestimmung solcher Verfahren genügt es daher, den gewichteten Mehrheitsgraphen (Abb. 3) zu kennen. Manche Wahlverfahren benötigen nicht einmal die Kantengewichte und operieren lediglich auf der (ungewichteten) Mehrheitsrelation. Letztere Verfahren sind damit im Wesentlichen äquivalent zu ungewichteten Turnierlösungen. Turnierlösungen haben auch Anwendungen, die über Wahlverfahren hinausgehen. Sie können immer dann eingesetzt werden, wenn aufgrund von paarweisen Vergleichen die beste Alternative ausgewählt werden soll. Paradebeispiele sind Sportligen, in denen jede Mannschaft gegen jede andere antritt und die Resultate dieser paarweisen Vergleiche am Ende in Form eines Rankings aggregiert werden müssen.

4.1 Gewinnerbestimmung bei unvollständigen Informationen

Oft kommt es vor, dass nur lückenhafte Informationen über die paarweisen Vergleiche innerhalb eines Turniers vorliegen, etwa weil einige Wähler noch nicht abgestimmt haben oder weil bestimmte Spiele einer Sportliga noch nicht ausgetragen wurden. In solchen Fällen ist es naheliegend, sich darüber Gedanken zu machen, welche Alternativen am Ende gewinnen werden. Zu diesem Zweck betrachtet man alle möglichen Vervollständigungen eines unvollständig spezifizierten Turniers und definiert *mögliche Gewinner* als diejenigen Alternativen, die in mindestens einer Vervollständigung ausgewählt werden. Eine Alternative ist darüberhinaus ein *notwendiger Gewinner*, falls sie in *allen* Vervollständigungen ausgewählt wird.

In meiner Arbeit untersuche ich die Berechnungskomplexität von möglichen und notwendigen Gewinnern für eine Reihe von gängigen gewichteten und ungewichteten Turnierlösungen. Die Ergebnisse reichen von einfachen Greedy Algorithmen (z. B. für die Turnierlösungen *Copeland* und *Top Cycle*) über nicht-triviale kombinatorische Algorithmen (*Maximin* und *Borda*) bis hin zu interessanten Härteresultaten (*Ranked Pairs* und *Uncovered Set*).

4.2 Minimale retentive Mengen

Thomas Schwartz hat einen Operator auf Turnierlösungen eingeführt, der kooperative Mehrheitsentscheidungen innerhalb eines Komitees modelliert. Für eine gegebene Turnierlösung S wählt die Turnierlösung $\mathring{S}$ die Vereinigung aller inklusions-minimalen S-*retentiven* Mengen. S-Retentivität ist eine natürliche Stabilitätseigenschaft für Teilmengen von Alternativen. Schwartz hat den $\circ$-Operator benutzt, um die Turnierlösung *Tournament Equilibrium Set* (*TEQ*) rekursiv zu definieren: $TEQ = \mathring{TEQ}$.

In meiner Arbeit betrachte ich die Auswirkungen des $\circ$-Operators auf beliebige ungewichtete Turnierlösungen. Insbesondere zeige ich, unter welchen Umständen attraktive axiomatische Eigenschaften von S auf $\mathring{S}$ „vererbt" werden. Durch die wiederholte Anwendung des $\circ$-Operators erhält man Sequenzen von attraktiven und effizient berechenbaren Turnierlösungen, die gegen TEQ konvergieren. Da die Berechnung von TEQ NP-schwer ist, sind diese Sequenzen besonders interessant, um TEQ mit einem Anytime-Algorithmus zu „approximieren". Schließlich stelle ich mit $\mathring{TC}$ eine neue Turnierlösung vor, die alle gängigen wünschenswerten Eigenschaften erfüllt und effizient berechnet werden kann.

Danksagung Ich danke meinen Koautoren Haris Aziz, Felix Brandt, Felix Fischer, Paul Harrenstein, Edith Hemaspaandra, Lane Hemaspaandra, Jan Hoffmann, Jérôme Lang und Hans Georg Seedig. Meine Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (Projekte BR-2312/6-1 und BR 2312/10-1) unterstützt.

Literatur

[Bri12] M. Brill. *Set-Valued Solution Concepts in Social Choice and Game Theory: Axiomatic and Computational Aspects*. Dissertation, Technische Universität München, 2012.

[Con10] V. Conitzer. Making Decisions Based on the Preferences of Multiple Agents. *Communications of the ACM*, 53(3):84–94, 2010.

[FHH10] P. Faliszewski, E. Hemaspaandra und L. Hemaspaandra. Using Complexity to Protect Elections. *Communications of the ACM*, 53(11):74–82, 2010.

[Rou10] T. Roughgarden. Algorithmic Game Theory. *Communications of the ACM*, 53(7):78–86, 2010.

[Tid87] T. N. Tideman. Independence of Clones as a Criterion for Voting Rules. *Social Choice and Welfare*, 4(3):185–206, 1987.

Markus Brill wurde am 10. März 1984 in Neustadt an der Weinstraße geboren. Er studierte Mathematik mit Nebenfach Informatik an der TU Kaiserlautern, der ETH Zürich und der TU München, wo er Mitglied im Elitestudiengang *TopMath* war. Seine Promotion erfolgte an der LMU München und der TU München im Rahmen des durch die European Science Foundation koordinierten Projekts *Computational Foundations of Social Choice*. Während dieser Zeit verbrachte er zwei Monate als Gastwissenschaftler an der École Polytechnique in Paris. Seine Arbeiten wurden in zahlreichen internationalen Journalen und Tagungsbänden veröffentlicht. Im September 2013 tritt er ein Feodor-Lynen-Forschungsstipendium an der Duke University an.