Der Schulversuch CAliMERO

Studienseminar Oldenburg

hen.koerner@t-online.de

Eine Kulturtechnik befördert die Leistungen der Intelligenz durch Versinnlichung und exteriorisierende Operationalisierung des Denkens. Das Kognitive bleibt nicht eingeschlossen in die unsichtbare Innerlichkeit der mentalen Zustände eines Individuums; Intelligenz und Geist werden zu einer Art distributivem, damit auch kollektivem Phänomen, das sich bildet im handgreiflichen Umgang des Menschen mit Dingen und symbolischen und technischen Artefakten.
S. Krämer/H. Bredekamp ([5], S. 18)

Dass der Umgang mit Symbolischem (Texten) zur Kulturtechnik gehört und die Leistungsfähigkeit des Menschen erhöht, ist wohl Allgemeingut; dass dies auch für den Umgang mit technischen Artefakten gilt, manchmal weniger. Gerade Mathematik wird dann als die Wissenschaft angesehen, in der die Technikfreiheit geradezu konstitutiv ist. Im niedersächsischen Schulversuch CAliMERO (*C*omputer*Al*gebra *i*m *M*athematikunterricht: *E*ntdecken, *R*echnen *O*rganisieren) werden Möglichkeiten und Effekte des Einsatzes einer mächtigen Technik (CAS, hier: V200 von TI) im Unterricht untersucht. Dieses Projekt ist in mehrerer Hinsicht bedeutsam (vgl. auch Computeralgebra-Rundbrief 35, 2004, S. 29-30):

(1) die große Anzahl an beteiligten Schülern und Lehrern (29 Schulklassen an 6 Gymnasien),

(2) die gemeinsame Planung, Durchführung und Evaluation des Unterrichts durch die beteiligten Lehrer in Kooperation mit einer wissenschaftlichen Begleitung (Prof. Dr. Bruder),

(3) der voll integrierte Einsatz des CAS in Lern- und Leistungssituationen in den Jahrgängen 7-10.

Zu (1): Der quantitative Umfang ermöglicht wohl zum ersten Mal umfangreiche und aussagekräftige empirisch fundierte Aussagen. Erste Ergebnisse liegen vor [1].

Zu (2): Längst nicht alle beteiligten Lehrer verfügten zu Beginn des Projekts über Unterrichtserfahrungen mit einem CAS. In den Versuchsschulen wird immer der gesamte Jahrgang mit dem CAS unterrichtet, so dass insgesamt eine gewisse Repräsentativität bezüglich der Unterrichtssituationen entsteht. Es sind nicht speziell motivierte Lehrer, die in ausgewählten Lerngruppen ausgesuchte Inhalte, womöglich noch in einem eng begrenzten Zeitrahmen, unterrichten, sondern große Teile von Fachgruppen, die die normalen Inhalte in ihrer ganzen Breite unterrichten, kurz: CAS wird zum normalen Werkzeug. Ein charakteristisches Element des Projekts sind viermal im Jahr stattfindende 3-tägige Arbeitstagungen der beteiligten Lehrer, in denen der Unterricht geplant und ausgewertet wird und Erfahrungen ausgetauscht werden. Didaktisch-methodische Impulse gibt es dabei von wissenschaftlicher Seite durch Prof. Dr. Bruder, eine fachbezogene durchgehende Begleitung und Unterstützung durch Fachleiter von Studienseminaren. Immer wieder geforderte Kooperation von Lehrkräften findet hier also in hohem Maße statt und ist konstitutiv für das Projekt. Im unmittelbar nachfolgenden Jahrgang werden die erstellten Materialien evaluiert, so dass sich ein reflexiver Zyklus aus Planung-Durchführung-Evaluation-Modifikation-Durchführung-Evaluation ergibt. Die sich dabei im Wechselspiel aus Planung, Durchführung und Evaluation ergebenden Modifikationen in den Einstellungen und Vorstellungen der beteiligten Lehrer gehören zu den spannenden Aspekten des Projekts. Sie werden, zumindest teilweise, im Heft 4/2009 von *Der Mathematikunterricht* dargestellt werden.

Zu (3): Im Projekt wird ein durchgängiges didaktisch-methodisches Gesamtkonzept eines Mathematikunterrichts mit einem CAS erarbeitet (Teile veröffentlicht in [2], [3]). Es handelt sich damit insofern um ein ganzheitliches Konzept als alle Standardinhalte und prozessorientierten Kompetenzen zu berücksichtigen sind und damit Inhalte und Verfahren, die ohne CAS zu bearbeiten sind, ebenso im Blick stehen wie die konkreten Einsatzmöglichkeiten des CAS. Es werden also auch Übungsphasen gestaltet, Sicherungen des Wissens in den Blick genommen und adäquate Leistungsüberprüfungen geschaffen. Natürlich und unumgänglich ist damit auch ständig die Frage nach Umfang und Tiefe händischer Fähigkeiten und Fertigkeiten virulent. Da zu dieser Frage keine sicheren empirisch geprüften Aussagen vorliegen, sind hier Setzungen vorgenommen worden. So werden zunächst alle neuen Algorithmen ohne CAS eingeführt und mit einfachen Eingaben und Koeffizienten geübt. Dies gilt auch für Termumformungen, wo alle kanonischen Umformungen (Zusammenfassen, Ausmultiplizieren, Ausklammern) händisch geübt werden, aber nicht in Verschachtelungen (mehrere Klammern, Doppelbrüche etc.). Die geforderten händischen Fähigkeiten werden durchgehend explizit in den einzelnen Themenbereichen angegeben. Insgesamt wird darüberhinaus dem Kopfrechnen ein hoher Stellenwert eingeräumt. So finden regelmäßige (wöchentlich) Kopfübungen statt, in denen grundlegende Fertigkeiten zu unterrichtlich zurückliegenden Inhalten systematisch gefestigt werden. Thesenhaft formuliert: Je mehr an Technik delegiert wird, desto mehr muss – in einfachen Ausformungen – händisch sicher beherrscht werden. Dahinter steckt die Annahme, dass sicherer Umgang mit einem CAS grundlegende händische Fertigkeiten voraussetzt, dass dies vor allem auch für die wichtige „Strukturerkennungskompetenz“ gilt. Im Vergleich zum bisherigen Unterricht ergibt sich damit wohl ein Mehr an Kopfrechnen mit einfachen Werten und ein Weniger an händischen Übungen auf mittlerem Komplexitätsniveau, wie sie im CAS-freien Unterricht vorherrschen. Neben diesen inhaltlichen Verschiebungen im Verhältnis von „händisch“ und „mit Technik“ tritt eine weitere Modifikation in der inhaltsbezogenen Strukturierung, die teilweise auch durch den CAS-Einsatz bedingt ist, im Übrigen aber Folge der zeitlichen Verdichtung durch G8 ist. Viele Themenbereiche werden zunächst in grundlegender Weise händisch oder mit CAS eingeführt, aber häufig nicht bis zur Routinisierung geübt, sondern an möglichst vielen Stellen wieder aufgenommen und weiter bearbeitet, in der Hoffnung, dass die höhere Frequenz unterrichtlichen Auftretens von Inhalten die fehlende Übungstiefe mehr als kompensiert. Die Darstellungen unten ((A) und (B)) konkretisieren dies.

Die weiteren Ausführungen hier beschränken sich auf (3) und dort weitgehend auf die inhaltlichen Auswirkungen, die ein voll integrierter CAS-Einsatz hat.

Unterricht mit CAS: Was bleibt? Was ändert sich? Die Sache ist kompliziert: Es geht einerseits primär um Möglichkeiten, mit Lerngruppen produktiv und ertragreich Mathematik zu betreiben. Die Frage nach dem CAS-Einsatz ist dann immer eine nachgeordnete, sie hat dienende Funktion im Sinne der primären didaktischen Ziele, CAS ist dann „nur“ ein Hilfsmittel, ein Werkzeug. Anderseits gehört Technik und ihr Gebrauch konstitutiv zum Menschen und verändert seinen Zugang zur Welt und Umgang mit ihr. Aus diesem Blickwinkel heraus ist zu fragen, wie weit sich Inhalte, Schwerpunkte und Methoden des Mathematikunterrichts in Folge eines so mächtigen Werkzeuges wie ein CAS es ist ändern können, sollen oder müssen. Im Folgenden werden die Aspekte in den Fokus genommen, die spezifisch für ein CAS sind. So werden im Projekt natürlich auch die grafisch-numerischen Möglichkeiten immer wieder so weit genutzt, dass die Trias Tabelle – Grafik – Term die traditionelle Überbetonung der Algebra und vor allem die damit einhergehende Dominanz der syntaktischen Anteile ersetzt. Da diese folgenreiche Modifikation aber auch schon durch GTR und TK erfolgt, wird sie hier nicht weiter ausgeführt, muss aber als ein zentraler Baustein ständig präsent sein.

Es sind zwei Aspekte, die die grundlegenden Erweiterungen des CAS gegenüber allein grafisch-numerischen Werkzeugen ausmachen:

> (A) Freie Definition von – mehrstelligen – Funktionen.
>
> (B) Syntaktische (algebraische) Fertigkeiten des CAS.

(A) Ein grundlegendes Merkmal von CAS ist die Möglichkeit, Formeln als Funktionen zu definieren und diese dann als Makros in Problembearbeitungen einzusetzen. Weiterhin schafft die freie Benennbarkeit der Variablen und Funktionen darüber hinaus die Möglichkeit, den Übergang von alltagssprachlichen Formulierungen über „Wortformeln“ zu formaleren Darstellungen feiner zu diskretisieren.

Beispiel:

(1) Faustregel: Der Bremsweg hängt von der Geschwindigkeit ab; er ist Geschwindigkeit mal Geschwindigkeit dividiert durch 100.

(2) Bremsweg $= \frac{\text{Geschwindigkeit}\cdot\text{Geschwindigkeit}}{100}$

(3) $brems(gesch) = \frac{gesch \cdot gesch}{100}$

(4) $brems(v) = \frac{v \cdot v}{100}$

(2), (3) und (4) sind Möglichkeiten der Eingabe der Faustregel als Formel in das CAS. Wenn Formeln auf diese Weise schon früh auch als Funktionen eingeführt werden, findet die wichtige Vernetzung von Formeln und Funktionen (Zuordnungen) entsprechend frühzeitig und explizit statt. Meist kennen Schüler schon Formeln (z. B. Umfang/Fläche eines Rechtecks) und auch Zuordnungen. Da dies aber in unterschiedlichen Kontexten (Geometrie-Zuordnungen) stattfindet, wird die inhaltliche Beziehung häufig wenig gesehen. Dies zeigt sich später dann deutlich, wenn man Schüler fragt, was die Formel für den Flächeninhalt eines Kreises mit Parabeln zu tun hat. Wenn man $F(r) = \pi r^2$ statt $F = \pi r^2$ lernt, ist der Zusammenhang augenscheinlich und heuristisch produktiv, wenn es z. B. um Kovarianz von Radius und Flächeninhalt geht. Da diese Zusammenhänge aber eben nicht selbsterklärend sind, müssen sie aktiv herbeigeführt werden und behutsam aber systematisch eingeführt werden. Im Projekt beginnt die Einführung in Klasse 7 im Zusammenhang mit dem Kennenlernen und Auswerten von Formeln für Zuordnungen. Mit dem

BMI (BodyMassIndex) kann hier dann auch schon eine mehrstellige Funktion eingeführt werden (vgl. [4]). Werden die Definitionen von Funktionen im Themenbereich „Zuordnungen“ eingeführt, so werden sie im Themenbereich „Flächenbestimmung“ wieder aufgenommen [2], Bd.1, S.49f.:

> Für die Trapezfläche wird folgende Gleichung allgemein formuliert:
>
> $$atrapez(a, c, h) = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h.$$
>
> a) Gib die Formeln zu den unten stehenden Eintragungen (1), (2) und (3) an. Skizziere zu jeder Formel drei Trapeze. Beschreibe, wie die Trapeze sich ändern, wenn man x ändert.
> (1) $atrapez(6, 4, x)$
> (2) $atrapez(6, x, 2)$
> (3) $atrapez(x, 4, 2)$
>
> b) Erkläre den Fall $x = 0$ auch geometrisch.
>
> c) Skizziere jeweils für (1), (2) und (3) die Zuordnung $x \mapsto$ *Trapezfläche* in ein Koordinatensystem. Erkläre die Bedeutung der Schnittpunkte.

Das Anwenden von Formeln für Flächeninhalte wird durch funktionale Betrachtungen und entsprechende Implementierung im CAS ergänzt, das CAS wird zur dynamischen Formelsammlung. Neben die klassische Darstellung der Formel in ihrer syntaktischen Struktur tritt die Darstellung als Funktion ($\frac{1}{2}gh \leftrightarrow adreieck(g, h)$). Letztere ermöglicht dann Kovarianzuntersuchungen mit entsprechenden grafisch-tabellarischen Verfahren indem ein Argument mit „x“ bezeichnet wird. Gelegentlich wird der funktionalen Schreibweise die mathematische Dignität abgesprochen (in Prüfungen ist sie dann sogar verboten), dies ist aber grundsätzlich falsch, weil beide Darstellungen ihre je spezifischen Möglichkeiten und natürlich auch Grenzen haben. Das Substituieren einzelner Argumente durch Terme und die Untersuchung von Auswirkungen von Parametervariationen lassen sich mit der Funktionsschreibweise übersichtlich gestalten und durchführen, die innere Struktur einer Formel bedarf dagegen natürlich der entsprechenden syntaktischen Darstellung. Wichtig für einen verständnisvollen Umgang mit solchen Formeln sind Übungen zur inhaltlichen Rückinterpretation, also z. B.: *Welche Frage kann mit BMI(70,x) beantwortet werden?* (weitere Beispiele in [2], Bd.1, S.49, Aufgabe 1a, 3), und zum aktiven Wechsel der Darstellungsformen (a. a. O. Aufgabe 4a). Im Themenbereich „Satz des Pythagoras“ können Schüler dann selbsttätig Funktionen zur Berechnung fehlender Größen erzeugen ($lang(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}$, $kurz(a, c) = \sqrt{c^2 - a^2}$) und dann auch wieder in wechselnden Kontexten funktionale Zusammenhänge erforschen, z. B. $kurz(5, x)$ bzw. $kurz(x, 25)$.

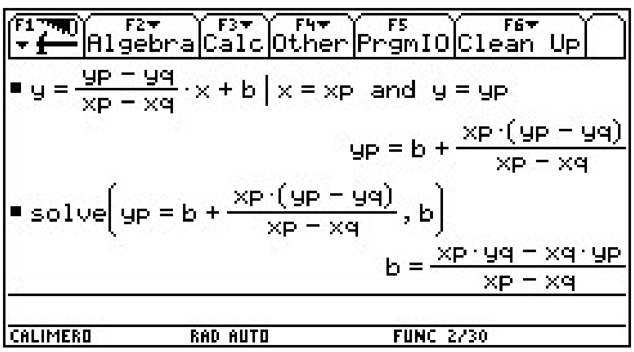
Auch bei Erschließung und Untersuchung von Funktionsklassen kann die funktionale Darstellung benutzt werden, auch wenn diese hier keinen zwingenden Vorteil hat. Es werden aber immer wieder der Umgang mit dieser Darstellungsform und die wechselseitigen Bezüge aus Funktionsaufruf, inhaltlicher Bedeutung und syntaktischer Struktur geübt und gefestigt.

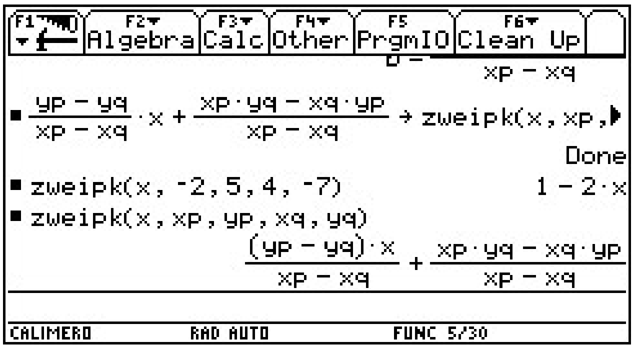
> Wir bauen ein Potenzfunktionenmakro:
>
> $$pot(x, k, a, b, c) = a \cdot (x - b)^k + c$$
>
> a) Beschreibe, welche Bedeutung die einzelnen Parameter haben.
>
> b)
> - Mit welcher Eingabe wird $f(x) = 2 \cdot (x-5)^4 - 8$ gebaut?
> - Was bedeutet $pot(1, 3, 1, -2, 5)$? Stelle eine Frage, für deren Beantwortung diese Eingabe eine Lösung liefert.
> - Was musst du eingeben um die Grundfunktionen $f(x, n) = x^n$ zu erhalten?
> - Mit welcher Eingabe kannst du den Funktionswert an der Stelle 3 von $f(x) = 24x^{-3} + \frac{1}{4}$ berechnen? Überprüfe dein Ergebnis durch eine Rechnung „zu Fuß“.
> - Was bedeutet $pot(3, 4, 1, 0, c)$? Stelle eine Frage, für deren Beantwortung diese Eingabe eine Lösung liefert.
> - Wie kann man mit *pot* die Schnittstellen mit der y-Achse bestimmen?

Insgesamt soll so im Verlauf der Klassen 7 bis 10 an vielen Stellen, aufeinander aufbauend, thematisiert in verschiedenen Kontexten, eine Kompetenz im funktionalen Umgang mit Formeln erzeugt werden, so dass Schüler am Ende selbsttätig, je nach Bedarf, entsprechende Funktionen individuell erzeugen und zur Problembearbeitung einsetzen können.

Darüber hinaus entsteht im CAS eine Formelsammlung, die den dynamisch, situativen Gebrauch der Formeln gestattet und sie damit zu einem produktiven Werkzeug machen. Die eigene „Programmierung“ solcher Formeln, z. B. die Flächen- und Volumenformeln, später vielleicht auch Abstandsformeln, setzt aber immer die algebraische Herleitung mit Variablen voraus, so dass Schüler hier auch unmittelbar die Produktivität und den Mehrwert des Arbeitens mit Formeln erleben können.

Umgekehrt gilt dasselbe: Wenn das Bestimmen der Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte an konkreten Beispielen eingeführt und geübt wird, kann durch eine allgemeine Behandlung nach gleichem Schema ein entsprechendes Makro erstellt werden. Auch wenn dies wohl nur selten von Schülern in Klasse 7/8 selbsttätig hergeleitet werden kann, so kann ein Nachvollzug mit anschließendem Umgang mit dem Makro sehr wohl eine produktive Einsicht und Vorbereitung für spätere selbsttätige Entwicklungen leisten.





Solchermaßen programmierte Geräte werden damit lerngruppenspezifisch konfiguriert und ermöglichen darüber hinaus auch eine individualisierte Nutzung. Grundlegende Fähigkeit beim Arbeiten mit solchen selbst definierten Makros ist die Substitution, die im Grunde schon beim Arbeiten mit den eingebauten Befehlen erforderlich ist. Diese sind eben auch mehrstellige Funktionen, bei deren Anwendungen vorgegebene Argumente zielgerecht substituiert werden müssen (*solve(Gleichung, variable)*).

Unabhängig von allen inhaltsbezogenen Argumenten für das Arbeiten mit selbstdefinierten, mehrstelligen Funktionen liegt ein weiteres Argument für die Thematisierung dieser Aspekte in der Aufklärung über die Arbeitsweise benutzter Technik. Im CAS gibt es vielfältige, entsprechend vordefinierte Funktionen, deren Erzeugung auf diese Weise durchsichtig gemacht wird. *DOTP(Vektor1,Vektor2)* (Skalarprodukt) kann ein Schüler auf einfache Weise dann selbst erzeugen.

(B) Die algebraischen Fertigkeiten eines CAS führen zu einem qualitativen und quantitativen Wandel in der Bedeutung und Funktion händischer Verfahren. Zunächst können mangelnde händische Fertigkeiten damit natürlich ersetzt werden oder zur nachträglichen Überprüfung händischer Lösungen benutzt werden. Wenn ein CAS aber allein als Reparaturbetrieb mangelnder händischer Fähigkeiten und Fertigkeiten angesehen werden würde, würde sein Potenzial bezüglich inhaltlicher und prozessorientierter Kompetenzen weit unterschätzt werden.

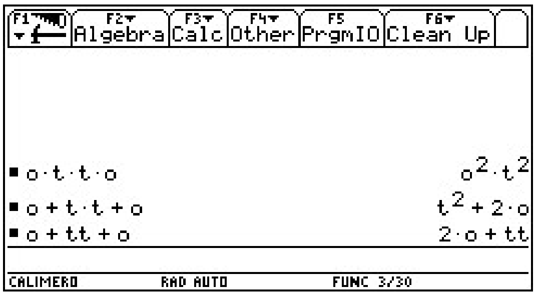
Umgekehrt könnte man vordergründig im Erstzugriff auf händische Verfahren vielleicht sogar verzichten. Damit würde aber meist jegliche Einsicht in zugrunde liegende Verfahren verhindert. Genau hier liegt der Bedeutungswandel händischer Verfahren. Sie dienen weniger dazu, eine Lösung zu finden, sondern sollen vielmehr Einsicht in prinzipielle Lösungsmöglichkeiten geben und Transparenz schaffen. Das CAS bietet die Möglichkeit, Kompetenzen im Wechselspiel aus „Technikeinsatz“ und „Lösung von Hand“ zu erzeugen, eine undialektische Gegenüberstellung von „händisch“ und „mit Technik“ greift zu kurz und verspielt produktive Möglichkeiten. Dies soll am Beispiel des Lösens linearer Gleichungssysteme veranschaulicht werden.

Ein CAS kann ein lineares Gleichungssystem durch direkte Eingabe der Gleichungen lösen. Dies wird im Projekt auch entsprechend zu Beginn eingeführt. Hier wird die Lösungskompetenz dann zunächst vollständig an den TC übergeben. Der Preis ist fehlende Einsicht in zugrunde liegende Verfahren und Prinzipien. Es liegt also reines, technologiegestütztes, „know how“ vor. Um Einsicht zu bekommen, werden die Gleichungen dann als Geradengleichungen interpretiert und nach y aufgelöst.

Die grundsätzliche Einsicht, das auf Descartes und Fermat zurückgehende Prinzip der Analytischen Geometrie, ist sicher nicht an Technik delegierbar, sondern eine menschliche Denkleistung. Die Umsetzung kann aber wieder mit technologischer Unterstützung erfolgen (Auflösen nach y, Gleichsetzen der Terme, grafische Darstellung der Geraden), „know what“ rückt in den Mittelpunkt. Im Projekt wird, aus curricularen Gründen, das Gleichsetzungsverfahren mit dann auch möglichen grafischen Lösungen als alleiniges algebraisches Verfahren eingeführt und an einfachen Beispielen geübt. Es ist eben nicht mehr Ziel, Schülern möglichst vielfältige händische Verfahren zur Verfügung zu stellen („Gleich-, Einsetzungs-, Additionsverfahren“), damit Gleichungssysteme geschickt und ökonomisch gelöst werden können, sondern Ziel ist Einsicht in prinzipielle Lösbarkeit und dazu reicht ein Verfahren aus, die Knopfdrucklösung des CAS ist entmystifiziert. Übungen, die Einsicht fördern, gewinnen dann ebenso an Stellenwert wie Modellierungen (vgl. [2], Bd. 3, S.27/28).

Beim später erfolgenden Übergang zu drei Gleichungen kann zunächst mit dem gleichen Verfahren, auch wieder rechnerunterstützt, gearbeitet werden. Das Erleben recht umständlichen Vorgehens beim Auflösen nach y und anschließendem Gleichsetzens führt dann zur Einführung des Additionsverfahrens, das zunächst auch von Hand ein- und durchgeführt wird. Systematisierung führt zum Gauss-Verfahren und der Einführung der Matrix-Schreibweise; der vielleicht schon vorher benutzte Befehl *RREF* (Diagonalisierung, Zeilenreduzierung) wird strukturell einsichtig, aus der „black box“ wird eine „white box“ bzw. „grey box“. Später können dann algebraische (Rang einer Matrix, etc.) und geometrische (Ebenenschnitte) Betrachtungen weitere Einsicht in Strukturen und Zusammenhänge liefern und mit Hilfe von Matrizen dann auch größere LGS wiederum mit Technik gelöst werden. Die Herausbildung der Kompetenz „Lösen eines Linearen Gleichungssystems (LGS)“ geschieht in wechselseitigem „Dialog“ mit dem CAS; es entsteht eine Art Spiralcurriculum, bei dem das CAS immer wieder auch Ausgangspunkt für die Weiterentwicklung von Verfahren sein kann. Das Interpretieren, Bewerten und Einsicht Gewinnen rückt in das Zentrum des mathematischen Handelns, das konkrete Ausrechnen rückt in den Hintergrund.

Die algebraischen Fertigkeiten eines CAS lassen sich auch für einen kreativen, schülerorientierten Zugang bzw. eine Festigung der algebraischen Rechengesetze nutzen (vgl. [2], Bd.1, S.48).



a) Variiere die Eingabe des Namens *Otto* mit verschiedenen Rechenzeichen. Finde einen Eingabeterm, bei dem sich besonders viel verändert.

b) Erkläre für zwei deiner Variationen, welche Rechengesetze angewendet wurden.

c) Warum ist das „tt“ nicht noch weiter vereinfacht worden? Erkläre!

Wie oben ausgeführt, sind die hier dargelegten Möglichkeiten des CAS-Einsatzes im Schulversuch *CAliMERO* immer eingebettet in ein konzeptionelles Ganzes. Ziel ist die allgemeine Verbesserung der mathematischen Problemlösefähigkeit, und dazu gehören dann auch reflexive, zusammenfassende, sinnstiftende Elemente, wie sie Mindmaps, rückblickende Analysen, Selbstdiagnosen usw. darstellen, die konsequent und durchgängig in den Unterrichtsgang integriert sind.
Darüber hinaus aber gilt: Wenn CAS-typische Fähigkeiten (frei definierbare Funktionen, syntaktische Umformungen) frühzeitig, konsequent und altersangemessen in die Erarbeitung und Festigung mathematischer Inhalte im Unterricht integriert werden, dann wird das CAS zu einem Werkzeug, bei dem die Art der Verwendung sowie die Kenntnisse und Fähigkeiten des Nutzers bezüglich des Geräts Verwendungszusammenhänge definieren und mögliche Breite und Tiefe der Nutzung festlegen. Bei der Integration in den Unterricht geht es dann zentral um die Entwicklung einer instrumentellen Wechselbeziehung zwischen Schüler und Computerwerkzeug. Kompetenzen entwickeln sich dabei in der Auseinandersetzung mit dem Werkzeug, indem immer wieder bestimmte Teilaspekte an dieses ausgelagert werden. So werden in den Materialien auch konsequenterweise die notwendigen technischen Fähigkeiten durchgehend in allen Themenbereichen explizit angegeben. Zur Kompetenz eines Schülers gehört dann zwangsweise auch die Kompetenz, Teile an das Computerwerkzeug zu übergeben. Man kann hier dann von „technologischer Kompetenz“ in dem Sinne sprechen, dass inhalts- bzw. prozessorientierte Kompetenzen im Dialog mit Computerwerkzeugen erworben werden, pointiert und etwas provokant ausgedrückt: Das CAS wird zu einem ausgelagerten, materialisierten Teil des Gehirns, mathematische Kompetenz beinhaltet auch die Benutzung von Technik:

> *Denken ... ist dann nicht mehr im Subjekt lokalisiert, sondern das System aus Subjekt und Kontext (das sind insbesondere die dort verfügbaren materiellen und mentalen Werkzeuge und Technologien) realisiert „Denkprozesse“.*
> *W. Dörfler ([6], S. 37)*

Literatur

[1] R. Bruder. Bergfest für *CAliMERO* in Bergkirchen, TI-Nachrichten 1/2008, Sonderausgabe, S. 10-13.

[2] R. Bruder/W. Weiskirch. *CAliMERO*, Arbeitsmaterialien Bd. 1-3, Münster 2007/2008.

[3] R. Bruder/W. Weiskirch. *CAliMERO*, Methodische und didaktische Handreichung Bd. 1-2, Münster 2007/2008.

[4] H. Körner. Bremsweg und BMI, in : TI-Nachrichten 1/2006, S. 17-22.

[5] S. Krämer/H. Bredekamp (Hrsg.), Bild–Schrift–Zahl, München 2003.

[6] H. G. Weigand/T. Weth. Computer im Mathematikunterricht, Heidelberg, Berlin 2002.