Anwendungen der Computeralgebra in der System- und Kontrolltheorie

Eva Zerz (Kaiserslautern)

zerz@mathematik.uni-kl.de

Die klassische Systemtheorie studiert die Eigenschaften gewöhnlicher Differential– und Differenzengleichungssysteme mit analytischen und algebraischen Methoden. Sie ist mathematische Grundlage der Regelungstechnik („Kontrolltheorie“) und seit Jahrzehnten in der Elektro– und Verfahrenstechnik zur Prozess-Steuerung etabliert.

Relativ neu ist der Ansatz der „Algebraischen Analysis“ für Kontrollsysteme in mehreren unabhängigen Variablen. Ursprüngliche Motivation war die Filterung zweidimensionaler Signale in der Bildverarbeitung. Ziel ist es, Eigenschaften eines linearen Systems von partiellen Differential– oder Differenzengleichungen aus einem zugeordneten polynomialen Modul abzuleiten.

Formal ist ein System durch drei Daten bestimmt: die Signalmenge $\mathcal{A}$, die Anzahl der Signale q, und das Systemverhalten $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}^q$. Man interpretiert $\mathcal{A}^q$ als die Menge aller Signalvektoren und $\mathcal{B}$ als die Teilmenge jener Signalvektoren, die dem Systemgesetz genügen. Solche Signalvektoren nennt man Systemtrajektorien.

Sei jetzt $\mathcal{B}$ der Lösungsraum eines linearen Systems partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, also

$$\mathcal{B} = \{w \in \mathcal{A}^q \mid R(\partial_1, \ldots, \partial_n)w = 0\}.$$

Der Signalraum $\mathcal{A}$ sei entweder der Raum der glatten Funktionen oder der Raum der Distributionen. Die repräsentierende Matrix R ist eine polynomiale Matrix in n Unbestimmten mit reellen oder komplexen Koeffizienten. Sei $\mathcal{D}$ der entsprechende Polynomring. Der Systemmodul $\mathcal{M} = \mathcal{D}^q/\mathrm{im}(R^T)$ ist der Kokern der Transponierten von R.

Es gilt die Beziehung

$$\mathcal{B} \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{A}),$$

eine Isomorphie von $\mathcal{D}$-Moduln [1]. Darüber hinaus ist $\mathcal{A}$ ein injektiver Kogenerator, das heißt, das Dualisieren mit dem kontravarianten Funktor $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{A})$ reflektiert Exaktheit [2,3].

Diese Tatsache ermöglicht es analytische Eigenschaften des Lösungsraumes $\mathcal{B}$ in algebraische Eigenschaften des Moduls $\mathcal{M}$ zu übersetzen und vice versa.

Folgende computeralgebraische Themen spielen dabei eine Rolle:

- Berechnung von Syzygien
- Berechnung freier Auflösungen
- Berechnung von Ext-Moduln
- Test auf Inklusion und Gleichheit von Moduln
- Test auf Torsionsfreiheit und Projektivität
- Berechnung des Torsionsuntermoduls
- Lösbarkeit und Lösung linearer Gleichungssysteme über dem Polynomring
- Berechnung des Durchschnitts und der Summe von Moduln
- Berechnung der Dimension polynomialer Ideale

So wird etwa die Frage nach der Inklusion von Systemen $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ vermöge der Kogeneratoreigenschaft übersetzt als Inklusion der Gleichungsmoduln $\mathrm{im}(R_2^T) \subseteq \mathrm{im}(R_1^T)$ und somit auf die Lösbarkeit der linearen Matrixgleichung $R_2 = XR_1$ über dem Polynomring zurückgeführt.

Die Lösbarkeit der inhomogenen partiellen Differentialgleichung $P(\partial_1, \ldots, \partial_n)y = v$ ist aufgrund der Injektivität äquivalent zu $Q(\partial_1, \ldots, \partial_n)v = 0$, wenn $\ker(P^T) = \mathrm{im}(Q^T)$. Ist also P gegeben, berechnet man die Syzygienmatrix Q und testet, ob die gegebene rechte Seite v der partiellen Differentialgleichung $Q(\partial_1, \ldots, \partial_n)v = 0$ genügt. Dies benutzt man etwa, um zu überprüfen, ob bestimmte Komponenten der Systemtrajektorie frei sind, d. h. uneingeschränkt durch das Systemgesetz. Solche freien Komponenten nennt man Inputs, und Systeme ohne freie Variablen heißen autonom.

Berechnet man das Ideal $\mathcal{I}_q(R)$, das von den $(q\times q)$-Minoren von R erzeugt wird, so gilt $\mathcal{I}_q(R) = 0$ genau dann, wenn das System freie Variablen besitzt. Ist hingegen $\mathcal{I}_q(R) \neq 0$, so bezeichnet man r als Autonomiegrad des Systems, wenn $\mathrm{codim}(\mathcal{I}_q(R)) \geq r$. Der Autonomiegrad 1 entspricht der Abwesenheit von Inputs (Autonomie), während der Autonomiegrad 2 die sogenannten überbestimmten Systeme charakterisiert (im Sinne von [3]). In diesen Systemen ist eine Trajektorie eindeutig bestimmt, wenn ihre Werte außerhalb einer offenen beschränkten konvexen Menge bekannt sind. Der Autonomiegrad n führt schließlich zu Systemen, die als reelle oder komplexe Vektorräume endlich-dimensional sind.

Andererseits sind die Torsionselemente von $\mathcal{M}$ von Interesse. Zwei Systemtrajektorien $w_1, w_2 \in \mathcal{B}$ heißen verknüpfbar, wenn es für alle offenen Mengen U_1, U_2, deren Abschlüsse disjunkt sind, eine Systemtrajektorie w gibt, die auf U_i mit w_i übereinstimmt. Dieses Konzept ist von fundamentaler Bedeutung für die Steuerung von Systemen, die ja gerade die Möglichkeit umschreibt, unter Einhaltung der Systemgesetze von einer beliebig vorgegebenen Systemtrajektorie auf eine andere, gewünschte zu wechseln. Die Torsionselemente von $\mathcal{M}$ stellen nun gerade die Obstruktion zur Steuerbarkeit dar. Genauer ausgedrückt: Bezeichnet man die Äquivalenzrelation der Verknüpfbarkeit mit $\sim$, so gilt

$$\mathcal{B}/\!\sim\; \cong\; T(\mathcal{M}),$$

wobei $T(\mathcal{M})$ der Torsionsuntermodul von $\mathcal{M}$ ist. Daher ist das System $\mathcal{B}$ steuerbar (d. h. alle Systemtrajektorien sind miteinander verknüpfbar), wenn $\mathcal{M}$ torsionsfrei ist [4]. Zum Test auf Torsionsfreiheit berechnet man eine Matrix M mit $\ker(R) = \mathrm{im}(M)$ und eine Matrix R_c mit $\ker(M^T) = \mathrm{im}(R_c^T)$, also zwei Syzygienberechnungen. Man überprüft dann, ob $\mathrm{im}(R^T) = \mathrm{im}(R_c^T)$. Falls ja, ist $\mathcal{M}$ torsionsfrei. Falls nein, repräsentiert R_c das größte steuerbare Subsystem von $\mathcal{B}$, da $\mathrm{coker}(R_c^T) \cong \mathcal{M}/T(\mathcal{M})$, was gerade der Teilmenge $\mathcal{B}_c$ aller mit der Nulltrajektorie verknüpfbaren Trajektorien entspricht.

Ist der Modul $\mathcal{M}$ sogar projektiv, so ist das System $\mathcal{B}$ ein direkter Summand des Signalvektorraumes $\mathcal{A}^q$. Das bedeutet, dass man jedes Untersystem $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ durch reguläres Zusammenschalten erreichen kann, das heißt, es gibt ein System $\mathcal{C}$, so dass

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \mathcal{B}' \quad \text{und} \quad \mathcal{B} + \mathcal{C} = \mathcal{A}^q.$$

Man interpretiert $\mathcal{B}$ als gegebenes System und $\mathcal{B}'$ als Teilsystem mit gewissen wünschenswerten Eigenschaften. Das System $\mathcal{C}$ stellt einen Regler dar: Unterwirft man die Trajektorien von $\mathcal{B}$ den zusätzlichen Einschränkungen des Reglers, so sind im Gesamtsystem nur die erwünschten Trajektorien zulässig. Die zweite Bedingung besagt, dass die Systemgesetze von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ unabhängig voneinander sein sollen.

Etwas allgemeiner fragt man sich bei einem beliebigen Paar $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, ob man $\mathcal{B}'$ durch reguläres Zusammenschalten erreichen kann. Modultheoretisch ausgedrückt: Ist $\mathrm{im}(R^T)$ ein direkter Summand von $\mathrm{im}(R'^T)$? Diese und verwandte Fragen führen auf konstruktive Berechnungen im Verband der Untermoduln von $\mathcal{D}^q$ [8]. Als Überblick über die hier dargestellten Sachverhalte eignen sich [6, Kapitel 10], [7] und [10]. In [5] und [9] findet sich eine ausführliche Diskussion der hier angerissenen Autonomie- und Steuerbarkeitsgrade.

Literatur

[1] Malgrange, B., *Systèmes différentiels à coefficients constants.* Séminaire Bourbaki 246, 1962/63.

[2] Oberst, U., *Multidimensional constant linear systems.* Acta Applicandae Math. 20, 1–175, 1990.

[3] Palamodov, V.P., *Linear differential operators with constant coefficients.* Springer, 1970.

[4] Pillai, H.K., Shankar, S., *A behavioral approach to control of distributed systems.* SIAM Journal on Control and Optimization 37, 388–408, 1999.

[5] Pommaret, J. F., Quadrat, A., *Equivalences of linear control systems.* Proceedings Math. Theory Networks Systems 2000, Perpignan, Frankreich, 2000.

[6] Sturmfels, B., *Solving systems of polynomial equations.* AMS, 2002.

[7] Wood, J., *Key problems in the extension of module-behaviour duality.* Linear Algebra Appl. 351–352, 761–798, 2002.

[8] Zerz, E., Lomadze, V., *A constructive solution to interconnection and decomposition problems with multidimensional behaviors.* SIAM Journal on Control and Optimization 40, 1072–1086, 2001.

[9] Zerz, E., *Extension modules in behavioral linear systems theory.* Multidimensional Systems and Signal Processing 12, 309–327, 2001.

[10] Zerz, E., *Multidimensional behaviors: An algebraic approach to control theory for PDEs.* Preprint, 2003.