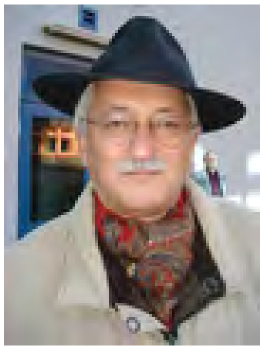

Zur Symmetrie einiger Kurven

J. Meyer
(Hameln)

j.m.meyer@t-online.de

Zusammenfassung

Die Parameterdarstellung eines Kreises wird variiert, um Kurven zu erhalten, deren Symmetrieverhalten den erzeugenden Termen nicht unmittelbar anzusehen ist. Schülerinnen und Schüler erhalten erstens eine nichttriviale Veranlassung, Matrizen zu verwenden, und sind zweitens mitunter angehalten, den Punkten auf der Kurve Parameter zuzuordnen, um den Nachweis von Punkt- oder Achsensymmetrie führen zu können. Einer der Kurventypen liefert im rotationssymmetrischen Fall sogar eine Veranlassung, sich etwas mit Kongruenzrechnung zu befassen.

1. Einleitendes Beispiel

Bekanntlich beschreibt $r \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$ einen Kreis mit Radius r. Was für eine Kurve erhält man, wenn man den Term etwas aufmischt, also zu

$$P(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(a \cdot t) + s \cdot \sin(b \cdot t) \\ r \cdot \sin(a \cdot t) + s \cdot \cos(b \cdot t) \end{pmatrix}$$

übergeht? Abb. 1 zeigt das Resultat für $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie $s = 0,7 \cdot r$.

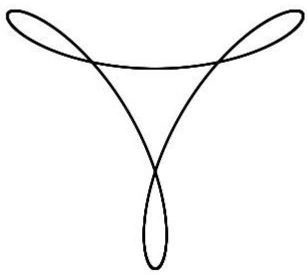

Abbildung 5

Die Symmetrie ist auffällig und nicht direkt aus der Gestalt für $P(t)$ ersichtlich. Wie lässt sie sich nachweisen? Offenbar muss eine Drehung von $P(t)$ um $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ dasselbe liefern wie eine Parameterverschiebung um φ, d. h. es muss mit der Drehmatrix $D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ die Gleichung

$$D_\varphi \cdot P(t) = P(t + \varphi) \tag{1}$$

gelten. Deren Gültigkeit ist mit einem CAS schnell bestätigt.

2. Didaktische Anmerkungen

Hinter dem Nachweis der Gültigkeit von (1) stecken natürlich die Additionstheoreme, die schon lange kein Element der Schulcurricula mehr sind; wären sie es, bräuchte man für (1) kein CAS. Auch die komplexen Zahlen sind schon lange aus der Schule verschwunden; hätte man sie, könnte man $P(t)$ als

$$P(t) = r \cdot e^{i \cdot a \cdot t} + s \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{2} - b \cdot t\right)}$$

schreiben und sofort sehen, dass mit $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ für $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ die Beziehung $P(t+\varphi) = e^{i \cdot \varphi} \cdot P(t)$ gilt. In beiden Fällen kompensiert der Einsatz eines CAS also fehlende mathematische Kenntnisse. Eine wirkliche Einsicht liefert nur der Weg über komplexe Zahlen.

3. Anschlussfragen

Die Beziehung (1) ist unabhängig von der Wahl von r und s gültig. Variiert man hingegen a und b, so hat man schnell die Vermutung, es mit einer $(a + b)$-zähligen Symmetrie zu tun zu haben. In der Tat gilt mit $\varphi = \frac{2\pi}{a+b}$ stets

$$P(t + \varphi) = D_{a \cdot \varphi} \cdot P(t) = D_{-b \cdot \varphi} \cdot P(t), \tag{2}$$

denn aus

$$P(t) = r \cdot e^{i \cdot a \cdot t} + s \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{2} - b \cdot t\right)}$$

folgt

$$P(t+\frac{2\pi}{a+b})=e^{i\cdot a\cdot\frac{2\cdot\pi}{a+b}}\cdot P(t).$$

Für konkrete Werte von a und b ist die Überprüfung von (2) mit einem einfachen CAS wie Maxima kein Problem.

4. Eine andere Kurvenschar

Eine andere Kurvenschar ist gegeben durch eine leichte Veränderung: Nun sei

$$P(t)=\begin{pmatrix} r_1\cos(t)+r_2\cos(at)+r_3\sin(bt)\\ r_1\sin(t)+r_2\sin(at)+r_3\cos(bt)\end{pmatrix}. \quad (3)$$

Abb. 2 zeigt den Fall $\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\\ 8\end{pmatrix}$; die r_i spielen für das Symmetrieverhalten keine Rolle.

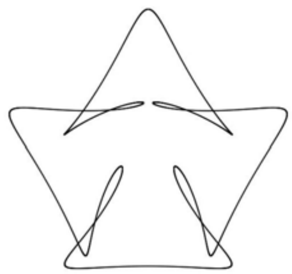

Abbildung 6

Die Kurve ist achsensymmetrisch, wie sich leicht nachprüfen lässt; es ist nämlich

$$\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot P(t)=P(\pi-t).$$

So ganz trivial ist der Umgang mit dem CAS dann doch nicht, da man die Parameter geeignet wählen muss.

5. Erste Variation

Wählt man statt dessen $\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\\ 9\end{pmatrix}$, so ergibt sich Abb. 3 mit zwei Achsensymmetrien.

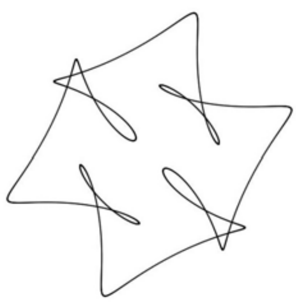

Abbildung 7

Dreht man die Kurve mit einer Matrix R um $45°$, so ist in der Tat

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot R\cdot P(t)=R\cdot P(\frac{3}{2}\pi-t)$$

sowie

$$\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot R\cdot P(t)=R\cdot P(\frac{\pi}{2}-t).$$

6. Zweite Variation

Mit $\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\\ 5\end{pmatrix}$ erhält man Abb. 4, die wegen $\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot P(t)=P(\pi+t)$ punktsymmetrisch ist.

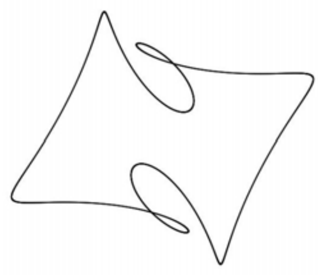

Abbildung 8

7. Dritte Variation

Interessanter ist der Fall $\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6\\ 4\end{pmatrix}$, der eine 5-zählige Symmetrie liefert (Abb. 5). Dies lässt sich mit Hilfe eines CAS wieder leicht überprüfen, liefert allerdings wiederum keinerlei Einsicht. Schreibt man jedoch den zugehörigen Kurvenpunkt (3) als

$$P(t)=r_1\cdot e^{i\cdot t}+r_2\cdot e^{i\cdot a\cdot t}+r_3\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{2}-b\cdot t\right)},$$

so bekommt man eine 5-zählige Symmetrie genau dann, wenn mit $\varphi=\frac{2\pi}{5}$ die Beziehung

$$e^{i\cdot\varphi}\cdot P(t)=P(t+\varphi)$$

gilt. Das ist der Fall für $a\cdot\varphi=\varphi$ und $-b\cdot\varphi=\varphi$. Nun ist aber $6\cdot\varphi=\varphi$ und $-4\cdot\varphi=\varphi$. Nun weiß man auch, wie man weitere rotationssymmetrische Kurven vom Typ (3) erzeugen kann.

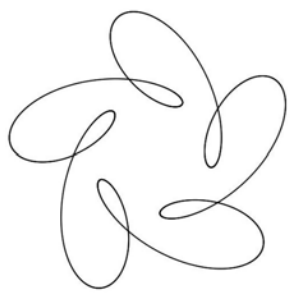

Abbildung 9

8. Schlussbemerkung

Man könnte immer so weitermachen. Es ist bemerkenswert, welcher Formen- und Symmetriereichtum in (3) steckt, wie man etwa an Abb. 6 mit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und an Abb. 7 mit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ sehen kann.

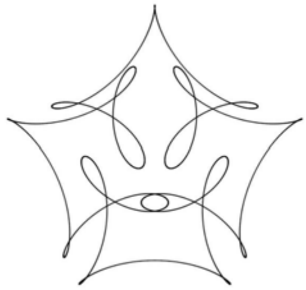

Abbildung 11

Allerdings weisen nicht alle derartige Kurven Symmetrien auf, wie Abb. 8 mit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ zeigt.

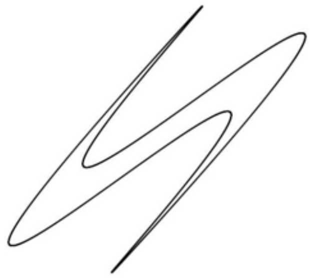

Abbildung 10

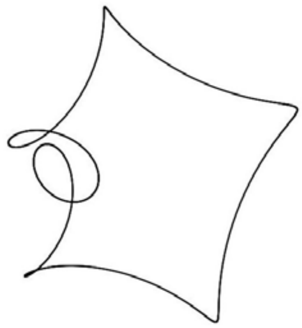

Abbildung 12