Parameterbehaftete lineare Gleichungssysteme in der Hochschullehre: Das Austauschverfahren

Ludwig Paditz
(HTW Dresden)

paditz@informatik.htw-dresden.de

Einleitung

In der Mathematikausbildung an der Hochschule für Technik und Wirtschaft in Dresden werden seit einigen Jahren Taschencomputer mit Computeralgebrasystem (CASIO Classpad 330) in der Lehre eingesetzt. Auf der Basis dieser Erfahrungen wird in diesem Beitrag am Beispiel von linearen Gleichungssystemen aufgezeigt, welche zusätzlichen Aspekte beim Einsatz von CAS-Taschencomputern zu berücksichtigen sind.

In vielen Anwendungsaufgaben spielen lineare Gleichungssysteme eine wichtige Rolle. Manchmal werden auch nichtlineare Probleme linearisiert und durch lineare Gleichungssysteme näherungsweise beschrieben. Oftmals findet man in numerischen Algorithmen lineare Gleichungssysteme wieder.

Gleichungssysteme können als Einzelgleichungen oder als eine Vektorgleichung (Linearkombination von Vektoren) bzw. als Matrixgleichung notiert werden.

Ein bekanntes Lösungsverfahren ist der Gauß-Algorithmus, welcher das Ausgangssystem in eine Zeilenstufenform überführt. Durch Rückrechnung findet man dann die Lösung.

Mit entsprechenden Software-Befehlen, z. B. ref bzw. rref des ClassPad330, können anhand der Ausgangsdaten des Systems sofort die Dreiecksgestalt bzw. Diagonalgestalt des Systems dargestellt und die Lösung abgelesen werden.
Probleme ergeben sich hierbei, wenn einzelne Daten des Systems unbekannt und als Parameter vorgegeben werden. ref bzw. rref und auch rank zur Rangbestimmung einer Matrix waren zunächst rein numerische Befehle außerhalb des CAS und wurden dann einfach als CAS-Befehle übernommen und können nicht entsprechend auf Parameter reagieren. Damit kommt es zu fehlerhaften Ergebnissen, da in parameterbehafteten Problemen oftmals Fallunterscheidungen erforderlich werden, um eine eindeutige oder eine mehrdeutige oder gar keine Lösung des Systems zu haben. Ebenso kann der Rang einer Matrix parameterabhängig sein.

Eduard Stiefel (ETH Zürich, 1909–1978) publizierte vor ca. 50 Jahren ein Einzelschrittverfahren, welches als Austauschverfahren in die Literatur eingegangen ist. Das Austauschverfahren erzeugt aus dem Ausgangssystem schrittweise äquivalente Systeme, die eine einfachere Gestalt bekommen und die sofort eine Fallunterscheidung erkennen lassen.
Je nach Parameterwahl kann im erhaltenen äquivalenten Endsystem dann sofort die zugehörige Lösung abgelesen werden.
Die Anzahl der möglichen Austauschschritte entspricht übrigens dem Rang der betrachteten Matrix.

Ein Austauschschritt wird über das zu wählende Pivot-Element abgewickelt. Das ist ein von Null verschiedener Koeffizient in der Koeffizientenmatrix des Systems, um ein vereinfachtes äquivalentes System zu generieren. Das Pivot ist sozusagen der Dreh- und Angelpunkt für den Austauschschritt und kann vom Anwender per Hand frei gewählt werden. Das Pivot muss von Null verschieden sein.

In den folgenden Abschnitten werden die oben genannten Befehle ref, rref und rank diskutiert und anschließend die vom Autor programmierten *LinEqSys*- und *AVRank*-Funktionen vorgestellt, die auf dem Austauschverfahren beruhen.
Das Austauschverfahren kann natürlich auch auf parameterfreie Systeme angewendet werden und ist aus Sicht des Autors effektiver als der Gauß-Algorithmus.

ref, rref und rank

Wir betrachten als Beispiel das folgende einfache System mit einem Parameter t.

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + tz &= 0 \qquad (1)\\
0x + 1y - 4z &= -1 \qquad (2)\\
1x + 3y + 0z &= 1 \qquad (3)\\
-1x + 0y + 2z &= 1 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Wir speichern die Gleichungen unter den Namen $G1$ bis $G4$ im ClassPad (OS 03.06.1000) ab und nutzen die dort im CAS vorhandenen Lösungsbefehle.

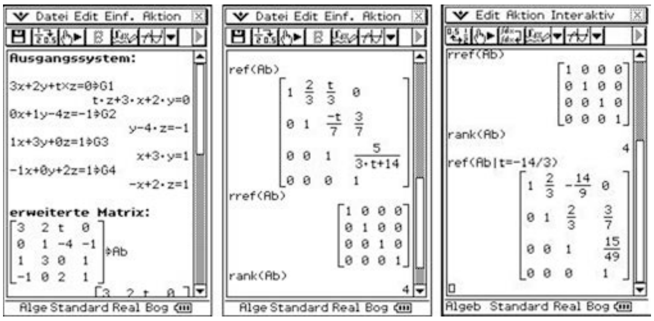

Abbildung 1

rref und rank deuten auf ein nichtlösbares System hin. ref ist im Fall $t = -14/3$ nicht erklärt.
Mit $\mathrm{ref}(\mathrm{Ab}|t = -14/3)$ ergibt sich jedoch auch hier ein Widerspruch in der letzten Zeile.

Damit erhalten wir über das CAS die Nichtlösbarkeit des Systems für alle t.

Wir nutzen jetzt die spezielle Eingabemaske für Gleichungssysteme mit 4 Gleichungen und den Unbekannten x, y, z, u, wobei u die vierte (fiktive) Unbekannte sei:

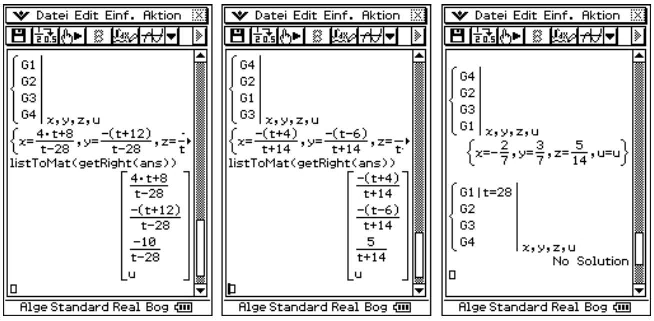

Abbildung 2

Bei unterschiedlicher Reihenfolge der Einzelgleichungen ergeben sich plötzlich unterschiedliche Lösungen:
$\{G4, G2, G3, G1\}$ ergibt eine von t unabhängige eindeutige Lösung für x, y, z.
$\{G1, G2, G3, G4\}$ und $\{G4, G2, G1, G3\}$ ergeben t-abhängige Lösungen, wobei die Fälle $t = 28$ bzw. $t = -14$ noch extra zu untersuchen wären.

Im Fall $t = 28$ gibt es keine Lösung, ebenso im Fall $t = -14$.

Nutzen Lernende kritiklos diese CAS-Befehle, kommen sie in der Regel zu einer falschen Lösung und erkennen die Abhängigkeit der Lösung von der Parameterwahl nicht.

Auch andere Geräte zeigen entsprechendes Verhalten. Wir betrachten die Situation mit dem TI-voyage200 (OS 3.10) und beginnen mit rref:

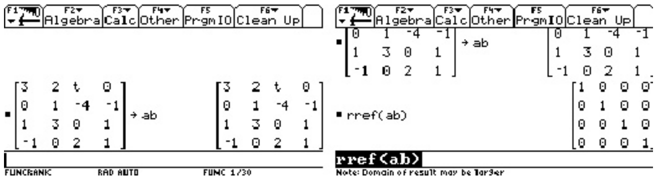

Abbildung 3

Hier verschwindet der Parameter ebenfalls und man erhält kein t-abhängiges Ergebnis.

Ähnlich unbefriedigend ist die Situation mit $\mathrm{ref}(\mathrm{ab})$:

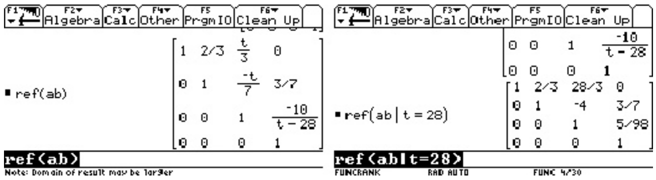

Abbildung 4

Ähnliche Feststellungen macht man mit Mathematica oder Maple und TI-NspireCAS. Auch hier sind entsprechende CAS-Befehle vorhanden, die jedoch nicht zu einer Fallunterscheidung führen. Z. B.

Maple 15: Sei Ab wieder die oben eingeführte erweiterte Matrix.

```
> with(LinearAlgebra)
> GaussianElimination(Ab)
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & t & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}t + \frac{28}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5t}{t-28} \end{bmatrix}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(Ab)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(Ab)
```

$$4$$

Mathematica 8: Vgl. die Befehle RowReduce[...] und MatrixRank[...].

LinEqSys und AVRank

Wir untersuchen das obige Beispiel mit dem Austauschverfahren und gehen von folgender Darstellung aus. Die rechten Seiten der Gleichungen werden dazu subtrahiert.

$$\begin{aligned} y1 &:= 3x + 2y + tz - 0 = 0 \\ y2 &:= 0x + 1y - 4z + 1 = 0 \\ y3 &:= 1x + 3y + 0z - 1 = 0 \\ y4 &:= -1x + 0y + 2z - 1 = 0 \end{aligned}$$

Das Ausgangssystem ist dann in der erweiterten Datenmatrix ST (mit vorzeichenverkehrter rechten Seite) enthalten (ST = Starttabelle). Die Zeilen werden mit $y1$ bis $y4$ bezeichnet (Hilfsvariablen, die ursächlich Nullen beinhalten). Wir nutzen LinEqSys.
Zuerst wird z. B. der Koeffizient $-1 \neq 0$ als Pivot gewählt, Koordinaten sind $4, 1$ (4. Zeile, 1. Spalte), d. h. $y4$ und x werden ausgetauscht und das äquivalente System hat die Gestalt $T1$:

$$\begin{aligned} y1 &= 2y + (t+6)z - 3 = 0 \\ y2 &= 1y - 4z + 1 = 0 \\ y3 &= 3y + 2z - 2 = 0 \\ x &= 0y + 2z - 1 \end{aligned}$$

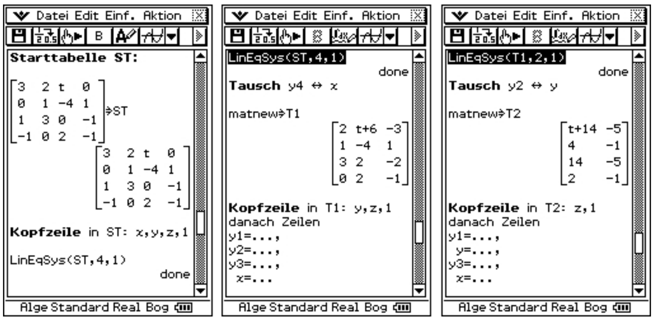

Abbildung 5

Nun wird z. B. der Koeffizient $1 \neq 0$ als Pivot gewählt, Koordinaten sind $2, 1$ (2. Zeile, 1. Spalte in $T1$), d. h. $y2$ und y werden ausgetauscht und das äquivalente System hat die Gestalt $T2$:

$$\begin{aligned} y1 &= (t+14)z - 5 = 0 \\ y &= 4z - 1 \\ y3 &= 14z - 5 = 0 \\ x &= 2z - 1 \end{aligned}$$

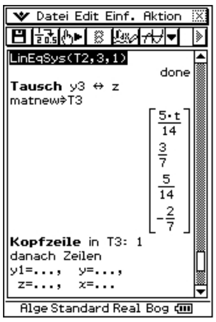

Abbildung 6

Abschließend wird z. B. der Koeffizient $14 \neq 0$ als Pivot gewählt, Koordinaten sind $3, 1$ (3. Zeile, 1. Spalte in $T2$), d. h. $y3$ und z werden ausgetauscht und das äquivalente System hat die Gestalt $T3 = ET$ (Endtabelle, alle Variablen x, y, z sind ausgetauscht):

$$\begin{aligned} y1 &= \frac{5t}{14} = 0 \\ y &= \frac{3}{7} \\ z &= \frac{5}{14} \\ x &= \frac{-2}{7} \end{aligned}$$

Die verbliebene $y1$-Zeile ist genau im Fall $t = 0$ widerspruchsfrei, d. h. im Fall $t = 0$ gibt es eine eindeutige Lösung, andernfalls ist das äquivalente System ET widerspruchsvoll ($y1$ nicht Null) und es gibt keine Lösung.

Durch den Austausch kommen $y4$, $y2$ und $y3$ in die Kopfzeile, so dass die unter diesen Variablen stehenden Spalten weggelassen werden.

Können nicht alle Variablen x, y, z getauscht werden, weil kein entsprechendes Pivot mehr zur Verfügung steht, können nichtgetauschte Variablen frei gewählt werden, sofern das äquivalente System ansonsten widerspruchsfrei ist.

Wir kommen jetzt zur Rangbestimmung mit AVRank. Hier werden nur die möglichen Austauschschritte gezählt. Dadurch können die Tabellen $T1, T2, \ldots$ noch weiter verkürzt werden. Während *LinEqSys* nur mit Spaltentilgung arbeitet, ist die Rangbestimmung mit *AVRank* noch effektiver: Es wird mit Zeilen- und Spaltentilgung gearbeitet:

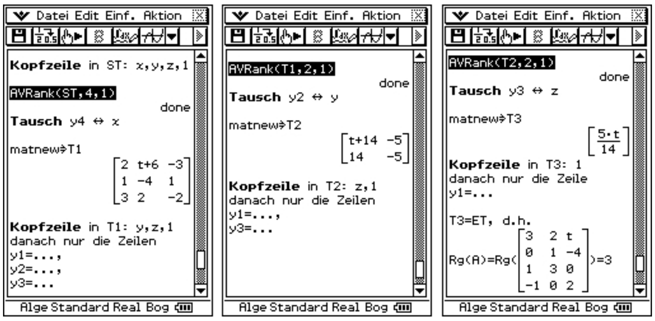

Abbildung 7

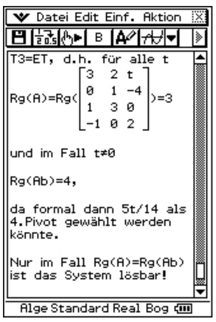

Abbildung 8

Die hier dargestellten neuen Verfahren wurden vom Autor sowohl für den ClassPad als auch für die aktuellen TI-Rechner (TI-89, TI-voy200, TI-NspireCAS) programmiert.
Es bleibt zu hoffen, dass diese Prozeduren irgendwann in die aktualisierten Betriebssysteme dieser Rechner

übernommen werden. Der Algorithmus zum Austauschverfahren ist in der unten angegebenen Literatur [2-7] zu finden.

Programme zum Download findet man unter folgendem Link:
`www.htw-dresden.de/~paditz/Rank_LinEqSys.zip`
und
`www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Nspire-LinEqSys.zip`

Literatur

[1] Ludwig Paditz. *Solution of a linear system of equations with parameters (Exchange-algorithm).* 12th International Congress on Mathematical Education, COEX, Seoul, Korea, Posters 9, Proceedings p. 7590, 8 July - 15 July 2012.

[2] Ludwig Paditz. *Mathematische Modelle und wissenschaftlich-technische Anwendungen. Beispiele aus Schule und Studium mit dem Grafikfähigen Symbol-Taschenrechner ClassPad300.* Hrg. v. CASIO Europe GmbH im Bildungsverlag EINS, Norderstedt 2004.

[3] Ludwig Paditz. *Solving Problems in Algebra and Analysis with CAS-Calculator.* Schriftenreihe des Collegium Europaeum Jenense 2006, Band 34, Hrsg. Fothe, Michael; Hermann, Martin; Zimmermann, Bernd. "Learning in Europe - Computers in Mathematics Instruction", p. 88-112.

[4] Ludwig Paditz. *The Rank of a Matrix with Parameters and the Solution of a Linear System of Equations with Parameters.* Proceedings of DES-TIME 2006 - Dresden Int Symp on Technology and its Integration into Mathematics Education, 20 - 23 July 2006, Dresden (Germany).

[5] Ludwig Paditz. *Rechnen und graphische Darstellungen mit komplexen Zahlen.* Anwendungsbeispiele aus Schule und Studium für den ALGEBRA FX 2.0, Hrg. v. CASIO Europe GmbH, Norderstedt 2001 (1. Aufl.).

[6] Wolfgang Brauch, Hans-J. Dreyer und Wolfhart Haack. *Mathematik für Ingenieure.* Teubner, 2006 (11. Aufl.).

[7] Dieter Labuch. *Aufgaben zur Linearen Algebra.* Teubner, 1998 (3. neub. Aufl.).

[8] Eduard Stiefel. *Einführung in die numerische Mathematik.* Teubner, 1976 (5. Aufl.).