Viele Trassierungsaufgaben sind unsinnig!

J. Meyer
(Hameln)

j.m.meyer@t-online.de

Zusammenfassung

Die schulüblichen Trassierungsaufgaben beachten oftmals nicht die Abhängigkeit von der Orientierung des Koordinatensystems. Dreht man die vorgegebenen Elemente, so resultieren recht unterschiedliche Kurventypen.

Einleitung

In früheren Zeiten waren Kurvendiskussionen ein wesentlicher Bestandteil des schriftlichen Abiturs in Mathematik. Man ist davon abgekommen, weil man eingesehen hat, dass Kurvendiskussionen häufig sinnarm waren und weil sie schematisch durchgeführt werden konnten und man somit nicht überprüfen konnte, ob die Schülerinnen und Schüler überhaupt irgendetwas inhaltlich verstanden hatten.
In den letzten Jahren fanden sich Trassierungsaufgaben in einigen Schulbuch- und Abituraufgaben; dabei handelt es sich um das „Problem“, zu zwei vorgegebenen geradlinigen Straßenabschnitten eine möglichst „gute“ Verbindung herzustellen, d. h. die Verbindungskurve soll sich stetig, knick- und krümmungsruckfrei an die vorhandenen Straßen anschließen. Setzt man die Kurve als Graph eines möglichst niedriggradigen Polynoms an, so ist ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Dass auch hier das Lösungsverfahren leicht schematisierbar war, trug zur Beliebtheit solcher Trassierungsaufgaben bei. Außerdem meinte man, dadurch den Realitätsbezug des Mathematikunterrichts gesteigert zu haben. Diese Meinung besteht zu Unrecht: Solche Aufgaben haben mit der Realität gar nichts zu tun!

Der einfachste Fall

Sehen wir uns den einfachsten Fall an: Zwei zueinander parallele Geradenstücke sind gegeben. Man kann das Koordinatensystem so wählen, dass die beiden Strecken symmetrisch zum Ursprung sind. Damit hat das Zielpolynom f eine einfache Struktur. Da es in beiden Verbindungspunkten nur drei Bedingungen gibt, kommt man mit Grad 5 aus. Beginnt eines der Geradenstücke im Punkt

$$P_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

so müssen $f(u_0) = v_0$ und $f'(u_0) = m_0$ (als Steigung der Strecke) sowie $f''(u_0) = 0$ sein. Dieses Gleichungssystem wird man nicht per Hand lösen wollen. Abb. 1 zeigt das Resultat für $v_0 = m_0 = 1$ und $u_0 = 2$.

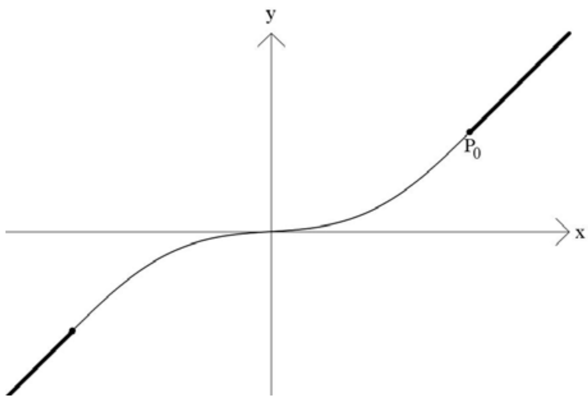

Abbildung 1: *Eine überzeugend wirkende Lösung*

So überzeugend die Lösung aussehen mag, so sinnlos ist sie auch. Dies merkt man, wenn man die vorgegebenen Elemente um den Ursprung mit dem Winkel φ dreht. Mit der Drehmatrix

$$M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

wird P_0 auf

$$P_\varphi = M \cdot P_0 = \begin{pmatrix} u_\varphi \\ v_\varphi \end{pmatrix}$$

abgebildet.
Wie bekommt man die neue Steigung m_φ? Zwar ist

$$m_\varphi = \tan(\arctan(m_0) + \varphi),$$

man kann jedoch auch folgendermaßen vorgehen:
Auf der Strecke mit Anfangspunkt P_0 und Steigung m_0 liegt auch der Punkt

$$Q_0 = \begin{pmatrix} u_0 + 1 \\ v_0 + m_0 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$M \cdot Q_0 - M \cdot P_0 = M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi - m_0 \cdot \sin\varphi \\ \sin\varphi + m_0 \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}$$

hat die neue Steigung den Wert

$$m_\varphi = \frac{\sin\varphi + m_0 \cdot \cos\varphi}{\cos\varphi - m_0 \cdot \sin\varphi}.$$

Nun müssen für das Zielpolynom f die Bedingungen $f(u_\varphi) = v_\varphi$ und $f'(u_\varphi) = m_\varphi$ sowie $f''(u_\varphi) = 0$ erfüllt werden.

Einige Resultate

Weiterhin seien $v_0 = m_0 = 1$ und $u_0 = 2$.
Für $\varphi = 40°$ bekommt man den in Abb. 2 gezeigten Straßenverlauf, der sich deutlich von dem der Abb. 1 unterscheidet.

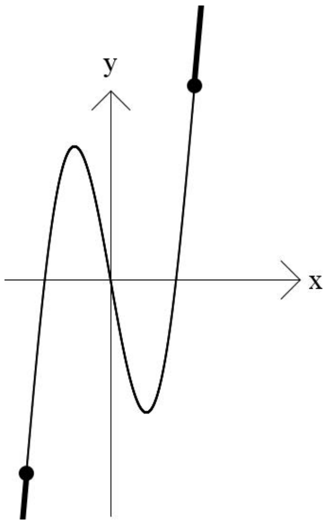

Abbildung 2: *Der Verlauf nach Drehung um* $40°$

Wiederum anders ist es in Abb. 3, die zu $\varphi = -40°$ gehört.

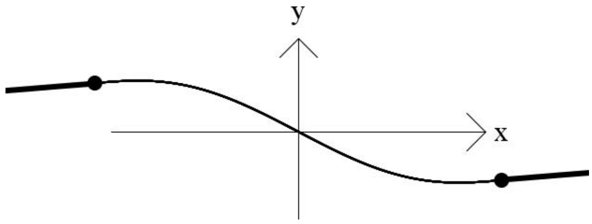

Abbildung 3: *Der Verlauf nach Drehung um* $-40°$

Der obige Ansatz setzt ganz wesentlich ein Koordinatensystem und dessen Ausrichtung voraus. Unterschiedlich gedrehte Koordinatensysteme führen zu unterschiedlichen Lösungen. Da es im Straßenbau kein ausgezeichnetes Koordinatensystem gibt, *muss* man auf Kurven zurückgreifen, die keine Funktionsgraphen sind, sondern sich allein durch ihre inneren Eigenschaften beschreiben lassen, etwa dadurch, dass deren Krümmung linear mit dem auf der Kurve zurückgelegten Weg wächst. Die *Klothoide* hat diese Eigenschaft; sie ist allerdings für den Mathematikunterricht zu kompliziert.