# Eine Gerade dreht sich um eine andere: Die Kühlturmfläche

**J. Meyer**
**(Hameln)**

j.m.meyer@t-online.de

## Einführung

Was für eine Fläche entsteht, wenn eine Gerade $g$ um eine feste andere Gerade $f$ rotiert? Sind $g$ und $f$ zueinander parallel, entsteht ein *Zylinder*. Falls sich beide Geraden schneiden, bekommt man einen *Doppelkegel*. Interessanter ist es, wenn beide Geraden zueinander windschief sind: Dann entsteht ein *einschaliges Hyperboloid*. Dieses wird auch hinsichtlich seiner Tangenten und Schnitte untersucht.

Im Anhang wird für quadratische Flächen eine Lösung des Hidden-Line-Problems vorgestellt.

## Vorbemerkung

Im Folgenden wird mit Punkten gerechnet wie mit den zugehörigen Ortsvektoren.

## Das einschalige Hyperboloid und seine Geraden

Die feste Gerade $f$ sei die $z$-Achse, und die rotierende Gerade $g$ verlaufe durch die Punkte

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\varphi)\\ \sin(\alpha+\varphi)\\ -1\end{pmatrix},$$

sie hat also den allgemeinen Punkt

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\\ 1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\varphi)-\cos\alpha\\ \sin(\alpha+\varphi)-\sin\alpha\\ -2\end{pmatrix}.$$

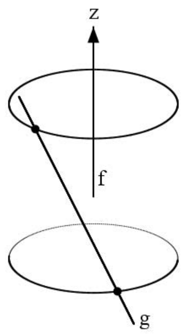


**Abbildung 1:** *$g$ rotiert um $f$*

Wie bekommt man die Gleichung der von $g$ überstrichenen Fläche? Schreibt man $d := \frac{1-\cos\varphi}{2}$, so ist einerseits (mit CAS-Hilfe)

$$x^2+y^2-1 = 4\cdot d\cdot(t-1)\cdot t$$

und andererseits $t = \frac{1-z}{2}$; zusammen folgt

$$x^2+y^2-d\cdot z^2 = 1-d.$$

Ist $\varphi = 0°$, also $d = 0$, so bekommt man einen *Zylinder* mit $x^2+y^2 = 1$ ($z$ beliebig). Ist $\varphi = 180°$, also $d = 1$, so lautet die Flächengleichung $x^2+y^2 = z^2$; man hat also einen *Doppelkegel*. Diese beiden trivialen Fälle seien für die weiteren Betrachtungen ausgeschlossen. Dann ist $0 < d < 1$, und die beiden Geraden $g$ und $f$ sind zueinander windschief (Abb. 2).

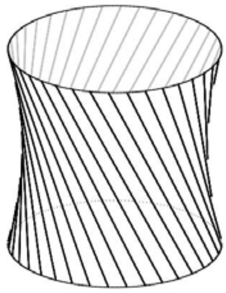

**Abbildung 2:** *Um eine Gerade rotiert eine dazu windschiefe Gerade*

## Geraden auf der Fläche und Tangenten

Zunächst fällt auf: Da $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$ ist, überstreichen die Geraden durch die Punkte

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\varphi) \\ \sin(\alpha-\varphi) \\ -1 \end{pmatrix}$$

dieselbe Fläche; diese enthält demnach (mindestens) *zwei* Scharen von Geraden (Abb. 3). Man findet solche Flächen bei den Ummantelungen von Kühltürmen; die beiden Geradenscharen verleihen solchen Bauwerken eine hohe Stabilität.

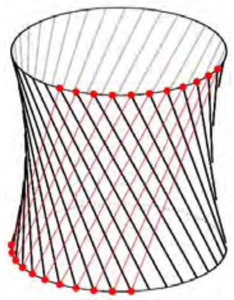

**Abbildung 3:** *Zwei Geradenscharen auf der Fläche*

Vielleicht gibt es noch mehr Geraden auf der Fläche? Und was lässt sich über Tangenten der Fläche sagen? Beginnen wir mit der zweiten Frage.
Sei dazu

$$P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

ein beliebiger Punkt der Fläche und

$$P + s \cdot R$$

mit Richtungsvektor

$$R = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

ein allgemeiner Punkt auf einer Geraden durch $P$. Um herauszufinden, für welche Richtungsvektoren $R$ diese Gerade Tangente ist, müssen wir sie mit der Fläche schneiden; die Schnittgleichung

$$s(s(u^2+v^2-dw^2)+2(ux_0+vy_0-dwz_0)) = 0$$

muss dann $s = 0$ als doppelte Nullstelle haben. Dies führt auf

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ -d \cdot z_0 \end{pmatrix} = 0;$$

alle Tangenten durch

$$P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

stehen somit auf

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ -d \cdot z_0 \end{pmatrix}$$

senkrecht und bilden mithin eine Ebene. Diese *Tangentialebene* hat die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ -d \cdot z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ -d \cdot z_0 \end{pmatrix} = 1 - d$$

und *durchsetzt* die Fläche.

Wenn die Gerade mit dem allgemeinen Punkt

$$P + s \cdot R$$

(mit $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ als beliebigem Punkt der Fläche und $R = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor) *vollständig* in der Fläche verlaufen soll, muss die obige Schnittgleichung für *alle* $s$ erfüllt sein, d.h. es muss nicht nur

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ -d \cdot z_0 \end{pmatrix} = 0$$

gelten, sondern außerdem noch

$$u^2 + v^2 = d \cdot w^2.$$

Nun kann keine der ganz in der Fläche verlaufenden Geraden parallel zur $x$-$y$-Ebene sein, so dass man ohne Bedenken $w = 1$ setzen kann. Aufgrund der Rotationssymmetrie der Fläche kann man $x_0 = 0$ annehmen; dann ist $y_0 \neq 0$. Die beiden entstehenden Gleichungen führen zur Lösung

$$u = \pm \frac{\sqrt{d} \cdot \sqrt{y_0^2 - d \cdot z_0^2}}{y_0}.$$

Aufgrund der Flächengleichung ist

$$y_0^2 - d \cdot z_0^2 = 1 - d \in (0;\ 1)\,;$$

somit gibt es für $u$ stets genau zwei Lösungen. Es gibt demnach nur die beiden schon bekannten Geradenscharen mit dem allgemeinen Punkt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \frac{s}{y_0} \cdot \begin{pmatrix} \pm\sqrt{d \cdot (1-d)} \\ d \cdot z_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

auf der Fläche. Natürlich liegen sie auch in der Tangentialebene zu $\begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

## Schnitte

Schneidet man die Fläche mit der Ebene zu $z = z_0$, bekommt man natürlich einen Kreis. Schneidet man mit der Ebene zu $x = x_0$, so ergibt sich

$$y^2 - d \cdot z^2 = 1 - d - x_0^2.$$

Für $x_0^2 = 1 - d$ bekommt man *Geraden*, nämlich die mit den allgemeinen Punkten

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1-d} \\ \pm\sqrt{d} \cdot z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-d} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{d} \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{1-d} \\ \pm\sqrt{d} \cdot z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-d} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{d} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Geraden müssen in den oben schon erwähnten Geradenscharen enthalten sein. Ein direkter Nachweis ist unnötig.
Ist $x_0^2 < 1 - d$, so bekommt man

$$y^2 - d \cdot z^2 = 1 - d - x_0^2 > 0$$

und somit eine seitlich geöffnete *Hyperbel* (Abb. 4).

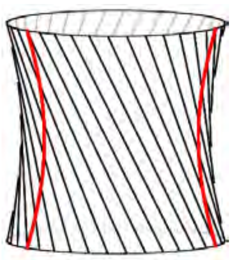

**Abbildung 4:** *Hyperbel als Schnittkurve*

Aus diesem Grunde heißt die Fläche *(einschaliges) Hyperboloid.*
Ist $x_0^2 > 1 - d$, so bekommt man

$$y^2 - d \cdot z^2 = 1 - d - x_0^2 < 0$$

und somit eine nach oben und unten geöffnete *Hyperbel* (Abb. 5).

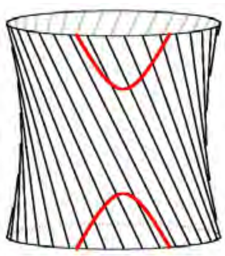

**Abbildung 5:** *Eine andere Hyperbel als Schnittkurve*

Schneidet man das Hyperboloid mit Ebenen, die nicht zu den Koordinatenebenen parallel sind, erhält man auch Ellipsen und Parabeln.

## Anhang: Eine einfache Lösung des Hidden-Line-Problems

Bei der Erstellung der Abbildungen war das Hidden-Line-Problem zu lösen, da einige Geradenteile von anderen überdeckt wurden. Da die Flächengleichung nur quadratisch ist, bietet sich folgende Lösung an, die auch wieder vom Einsatz eines CAS profitiert: Vorausgesetzt wird, dass es sich bei den Abbildungen um das Resultat einer *geraden Parallelprojektion* handelt; das räumliche Objekt wird auf die Ebene mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot N = 0$$

abgebildet. Zu jedem Flächenpunkt

$$P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

gibt es einen zum Normalenvektor

$$N = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

parallelen Projektionsstrahl mit dem allgemeinen Punkt

$$X = P + \lambda \cdot N.$$

Dieser Strahl schneidet die Fläche außer in $P$ noch in einem weiteren Punkt $Q$. Da die Flächengleichung quadratisch ist, lässt sich das zu $Q$ gehörige $\lambda \neq 0$ leicht ausrechnen: Es ist

$$\lambda_Q = -2 \cdot \frac{N \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ -d \cdot z_0 \end{pmatrix}}{n_x^2 + n_y^2 - d \cdot n_z^2}.$$

Falls $\lambda_Q$ positiv ist, liegt $Q$ zwischen dem Auge und $P$ (Abb. 6); $P$ ist dann unsichtbar.

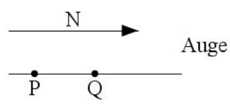


**Abbildung 6:** *P ist unsichtbar*

In der Formel für $\lambda_Q$ erkennt man einiges an *Struktur*. So tritt der Normalenvektor der Tangentialebene zu $P$ auf; außerdem erkennt man, dass die Form des Nenners auch in der Flächengleichung

$$x^2 + y^2 - d \cdot z^2 = 1 - d$$

erscheint. Ordnet man dem Punkt

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

den Punkt

$$X^* := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ -d \cdot z_0 \end{pmatrix}$$

zu, so schreibt sich die Flächengleichung einfach als

$$X \cdot X^* = 1 - d$$

(mit dem gewöhnlichen Skalarprodukt), und die zu $P$ gehörige Tangentialebene hat die Gleichung

$$X \cdot P^* = 1 - d.$$

Schneidet man den Projektionsstrahl, dessen allgemeiner Punkt

$$P + \lambda \cdot N$$

ist, mit dem Hyperboloid, bekommt man

$$\begin{aligned} &(P + \lambda \cdot N) \cdot (P^* + \lambda \cdot N^*) \\ &= P \cdot P^* + 2 \cdot \lambda \cdot N \cdot P^* + \lambda^2 \cdot N \cdot N^* \\ &= 1 - d, \end{aligned}$$

woraus sich die Lösungen

$$\lambda = 0$$

und

$$\lambda = -\frac{P \cdot N^* + P^* \cdot N}{N \cdot N^*}$$

sofort ergeben; man hat demnach das gleiche Resultat wie oben. Das ist mitunter so beim CAS-Einsatz: Wenn man das Ergebnis sieht, kommt man auch auf einem anderen Weg dorthin, der die ganze Rechnerei überflüssig macht.

Allerdings wird mit der Ungleichung $\lambda_Q > 0$ zu viel als unsichtbar deklariert, denn in Wahrheit kann man auch oben in die Fläche hineingucken. Man muss daher sagen: $P$ ist unsichtbar, wenn $\lambda_Q > 0$ ist und wenn die $z$-Koordinate von $Q$ im Bereich $[-1;\ 1]$ liegt.

Selbstverständlich lässt sich die Hidden-Line-Problematik auch vollständig an ein CAS oder Zeichenprogramm delegieren; man sieht aber, dass man bei quadratischen Flächen auch mit einfacher Vektorgeometrie weiterkommt. Das hier vorgestellte Verfahren wird aufwändiger, wenn man auch noch die zusätzliche Darstellung von Tangential- oder Schnittebenen berücksichtigen will.