März 2012

Computeralgebra Rundbrief

> Ausgabe 50

- Tagung der Fachgruppe im Mai
- Neues von CoCoA
- Klassifikation simplizialer Arrangements
- CA in der Schule - Stand der Dinge!?

www.fachgruppe-computeralgebra.de

GI DMV GAMM

Werbeseite Texas Instruments

Computeralgebra-Rundbrief

Nr. 50 März 2012

Fachgruppe Computeralgebra

Inhaltsverzeichnis

Impressum

Der Computeralgebra-Rundbrief wird herausgegeben von der Fachgruppe Computeralgebra der GI, DMV und GAMM
(verantwortliche Redakteure: Dr. Michael Cuntz, Dr. Gohar Kyureghyan, car@mathematik.de)

Der Computeralgebra-Rundbrief erscheint halbjährlich, Redaktionsschluss 15.02. und 15.09. ISSN 0933-5994. Mitglieder der Fachgruppe Computeralgebra erhalten je ein Exemplar dieses Rundbriefs im Rahmen ihrer Mitgliedschaft. Fachgruppe Computeralgebra im Internet:
http://www.fachgruppe-computeralgebra.de.

Konferenzankündigungen, Mitteilungen, einzurichtende Links, Manuskripte und Anzeigenwünsche bitte an die verantwortlichen Redakteure.

Die Geschäftsstellen der drei Trägergesellschaften:

GI (Gesellschaft für Informatik e.V.)
Wissenschaftszentrum
Ahrstr. 45
53175 Bonn
Telefon 0228-302-145
Telefax 0228-302-167
gs@gi-ev.de
http://www.gi-ev.de

DMV (Deutsche Mathematiker-Vereinigung e.V.)
Mohrenstraße 39
10117 Berlin
Telefon 030-20377-306
Telefax 030-20377-307
dmv@wias-berlin.de
http://www.dmv.mathematik.de

GAMM (Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik e.V.)
Technische Universität Dresden
Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke
01062 Dresden
Telefon 0351-463-33448
Telefax 0351-463-37086
GAMM@mailbox.tu-dresden.de
http://www.gamm-ev.de

Mitteilungen der Sprecher

Liebe Mitglieder der Fachgruppe Computeralgebra,

wir freuen uns, Ihnen die 50. Ausgabe des Computeralgebra-Rundbriefs präsentieren zu dürfen. Anlässlich dieses Jubiläums wurde die graphische Gestaltung des Heftumschlages von unserem Redakteur Michael Cuntz überarbeitet. Zu sehen ist ein Diagramm, das dem – laut Computer – größten sporadischen kristallographischen Arrangement (mit 37 Hyperebenen) in Dimension drei entspricht. Es hat 720 Ecken, 1080 Kanten und 362 Flächen. Mehr dazu finden Sie auf Seite 13 dieses Heftes.

Die Klassifikation der kristallographischen Arrangements ist auch Thema des Hauptvortrages, den Michael Cuntz bei der Computeralgebra-Tagung der Fachgruppe halten wird. Diese findet im Zeitraum 10.–12. Mai 2012 in Kassel statt. Die weiteren Hauptvortragenden sind Daniel Andres (Aachen), Anne Frühbis-Krüger (Hannover), Andreas Klein (Gießen) und Gabor Wiese (Luxemburg). Vortragstitel und Kurzzusammenfassungen finden Sie in diesem Heft. Daneben wird es wie bei den vergangenen Computeralgebra-Tagungen Kurzvorträge und Software-Präsentationen geben. Dabei hoffen wir auf eine rege Beteiligung aus der Fachgruppe. Bitte weisen Sie insbesondere Nachwuchswissenschaftler auf diese Tagung hin. Sie bietet gerade Doktoranden eine interessante Gelegenheit, erste eigene Resultate vorzustellen und Kontakte zu anderen Arbeitsgruppen im Bereich Computeralgebra zu knüpfen. Es gibt keine Tagungsgebühr, nur einen kleinen Unkostenbeitrag für die Kaffeepausen. Außerdem gibt es einen Preis in Höhe von 500 Euro für den besten Vortrag eines Nachwuchswissenschaftlers. Ein Anmeldeformular befindet sich auf den Webseiten der Fachgruppe.

Gunter Malle hat den höchsten Förderpreis des Europäischen Forschungsrats (European Research Council) erhalten, den „ERC Advanced Grant“, der in einem hochkompetitiven Auswahlverfahren an europäische Spitzenforscher vergeben wird. Sein Projekt „Counting conjectures and characters of almost simple groups“ wird mit über 1.4 Millionen Euro für die nächsten fünf Jahre gefördert. Wir freuen uns mit unserem Kollegen und gratulieren herzlich!

Anlässlich der Pensionierung von Hans-Wolfgang Henn fand am 27. Januar 2012 ein Festkolloquium an der TU Dortmund statt. Herr Henn war von 2002 bis 2011 Mitglied der Fachgruppenleitung und hat unter anderem mehrere Ausgaben der Tagungsreihe „Computeralgebra in Lehre, Ausbildung und Weiterbildung“ für die Fachgruppe organisiert. Wolfram Koepf richtete ein Grußwort an die rund 80 Teilnehmer der Veranstaltung und dankte Herrn Henn insbesondere für seinen Einsatz für die Belange der Computeralgebra.

Gilbert Greefrath und Jan Hendrik Müller, die neuen Experten für Lehre und Didaktik bzw. Schule in der Fachgruppenleitung, stellen in diesem Heft den Stand der Dinge und aktuelle Entwicklungen beim Einsatz von Computeralgebrasystemen in der Schule dar. Beide widmen sich ihrem neuen Aufgabenfeld innerhalb der Fachgruppe mit viel Elan und sind jederzeit offen für Anregungen und Rückmeldungen aus der Fachgruppe, was diese Tätigkeit betrifft. Die nächste Tagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" (AKMUI) findet von 28. bis 30. September 2012 in Soest statt.

Am 13. Februar 2012 traf sich die Fachgruppenleitung in Münster. Die nächste Sitzung wird voraussichtlich am 28. September 2012 in Soest stattfinden. Wir bitten alle Mitglieder der Fachgruppe, die Rundbrief-Redaktion mit Themenvorschlägen, Beiträgen, Informationen über Promotionen und Habilitationen, Hinweisen auf Bücher, Programmpakete und Tagungen etc. zu unterstützen.

Wir hoffen, Sie mit dem vorliegenden Heft gut zu informieren.

Eva Zerz *Florian Heß*

Tagung in Kassel, 2009

Tagung der Fachgruppe Computeralgebra, 10. – 12.05.2012, Kassel

`http://www.fachgruppe-computeralgebra.de/TagungKassel`

In Fortsetzung der erfolgreichen Tagungen 2003, 2005, 2009 in Kassel und 2007 in Kaiserslautern führt die Fachgruppe im Mai 2012 wieder eine derartige Tagung in Kassel durch. Ziel ist es, wie auf den Vorgängerkonferenzen ein Forum zu bieten, das es erstens Nachwuchswissenschaftlern ermöglicht, ihre Ergebnisse vorzustellen, andererseits aber auch einige Hauptvortragende zu gewinnen, die Übersichtsvorträge über wichtige Gebiete der Computeralgebra und über Computeralgebra-Software geben sollen.

Die Fachgruppe Computeralgebra vergibt für den besten Vortrag eines Nachwuchswissenschaftlers wieder einen mit € 500 dotierten Nachwuchspreis.

Wir konnten folgende Wissenschaftler für einen Hauptvortrag gewinnen:

- **Daniel Andres (RWTH Aachen):** *Algorithmische Aspekte der D-Modultheorie*

  Unter D-Moduln versteht man Moduln über Ringen von Differentialoperatoren. Im Vortrag wird ausschließlich die Weylalgebra betrachtet, d. h. der (nicht-kommutative) Ring linearer partieller Differentialoperatoren mit polynomiellen Koeffizienten über einem Körper der Charakteristik null.

  In den letzten 15 Jahre wurden auf dem Gebiet der algorithmischen D-Modultheorie massive Fortschritte erzielt.

  Gröbnerbasen, sowohl in der Weylalgebra selber als auch in gewissen Abwandlungen dieser, kommt eine besondere Bedeutung bei jeglichen konkreten Berechnungen zu.

  Im Vortrag soll ein kurzer Überblick über die wichtigsten Konzepte, wie z. B. sogenannte Bernstein-Sato-Polynome (auch als b-Funktionen bekannt), sowie einige Anwendungen gegeben werden.

- **Michael Cuntz (Universität Kaiserslautern):** *Klassifikation der kristallographischen Arrangements*

  Simpliziale Arrangements wurden 1940 von Melchior entdeckt und in der Lösung vieler Probleme über Arrangements verwendet. Zum Beispiel waren sie die zentralen Objekte in Delignes Lösung der Vermutung von Brieskorn. Im Dreidimensionalen sind simpliziale Arrangements Triangulierungen der Sphäre durch Geraden.

  Die Entdeckung des Weyl-Gruppoids als Symmetriestruktur gewisser Hopf-Algebren hat in den letzten Jahren zur Klassifikation einer großen Klasse von simplizialen Arrangements geführt, den sogenannten kristallographischen Arrangements.

  Wir wollen im Vortrag auf die grundlegenden Eigenschaften der Weyl-Gruppoide eingehen und die algorithmischen Methoden vorstellen, die zur Klassifikation geführt haben. Außerdem wollen wir über Zusammenhänge zu torischen Varietäten, Cluster-Algebren und orientierten Matroiden berichten.

- **Anne Frühbis-Krüger (Universität Hannover):** *Singularitäten und Computeralgebra*

  Bei der Untersuchung von Singularitäten kommen Techniken aus verschiedensten Gebieten

der Mathematik zusammen, aus der Algebra, der Algebraischen Geometrie und der Topologie ebenso wie der Analysis. In diesem Vortrag werde ich verschiedene Facetten der Singularitätentheorie beleuchten, in denen sich der Einsatz algorithmischer Methoden etabliert hat, angefangen von der einfachen phänomenologischen Untersuchung gegebener Singularitäten über Modulraumprobleme bis hin zur Desingularisierung.

- **Andreas Klein (Gießen):** *RSA Protokollfehler, LLL und Gröbnerbasen*

  Das bekannte RSA-Verfahren hat verschiedene schwache Instanzen. Diese können in der Praxis leicht vermieden werden. Doch dazu ist es nötig, dass der Anwender die potenziellen Gefahrenquellen kennt. Einige der interessantesten Angriffe gegen schwache RSA-Instanzen nutzen klassische Computeralgebratools wie den LLL-Algorithmus oder Gröbnerbasen.

  In diesem Vortrag werden jeweils ausgehend von einem konkreten kryptographischen Problem solche Angriffe und die dahinter stehende Mathematik vorgestellt.

- **Gabor Wiese (Universität Luxemburg):** *Modulare Galois-Darstellungen und Computeralgebra*

  Ein herausragendes Resultat der Arithmetischen Geometrie der letzten Jahre stellt zweifelsohne der Beweis von Khare und Wintenberger der Modularitätsvermutung von Serre dar. Diese impliziert unter anderen die verallgemeinerte Taniyama-Shimura-Vermutung (die den großen Satz von Fermat zur Folge hat) und neue Fälle der Artin-Vermutung.

  Für die Computeralgebra ist die Serresche Modularitätsvermutung auch von großer Bedeutung, denn sie erlaubt in vielen Fällen die Übertragung von sehr harten zahlentheoretischen Fragen in Fragen über Modulformen.

  Letztere sind aber gut mittels Computeralgebra berechenbar, so dass oft auch für die Zahlentheorie interessante Rückschlüsse gezogen werden können.

  Der Vortrag wird die Objekte der Serreschen Modularitätsvermutung erläutern und mit Beispielen illustrieren.

New Flavours of CoCoA

John Abbott, Anna M. Bigatti
(Università di Genova)

abbott@dima.unige.it
bigatti@dima.unige.it

There are two ways of constructing a software design.
One way is to make it so simple
that there are obviously no deficiencies.
And the other way is to make it so complicated
that there are no obvious deficiencies.
The first method is far more difficult.
C. A. R. Hoare

What is CoCoA?

First released in 1988, CoCoA is a *special-purpose* system for doing **Co**mputations in **Co**mmutative **A**lgebra: *i.e.* it is an interactive system specialized in the algorithmic treatment of polynomials, and is *freely available* for most common platforms.

One of the main purposes of the CoCoA system is to provide a virtual "laboratory" for using and studying computational commutative algebra: it belongs to an elite group of highly specialized systems having as their main forte the capability to calculate Gröbner bases. This means that CoCoA is optimized for computing with multivariate polynomials, their ideals and modules. Other special strengths of CoCoA include polynomial factorization, exact linear algebra, Hilbert functions, zero-dimensional schemes, and toric ideals.

The usefulness of these technical skills is enhanced by its programming language, the CoCoALanguage, which places great emphasis on being easy and natural to use. Consequently, CoCoA is the system of choice both for teaching advanced courses in several universities, and also for many researchers wanting to explore and develop new algorithms without the administrative tedium necessary when using "low-level" languages.

The new Flavours of CoCoA

About 10 years ago, a new initiative began: namely, to rebuild the CoCoA software laboratory while removing the inherent limitations of the original. The new software comprises three main components: a C++ library (CoCoALib), an algebra computation server (CoCoAServer), and an interactive system (CoCoA-5). Of these components CoCoALib is the heart; it embodies all the "mathematical knowledge" and it is currently the most evolved part ([3]). The role of the other two parts is to make CoCoALib's capabilities more easily accessible.

The first result of this approach is the collaboration with the project ApCoCoA (Applied Computations in Commutative Algebra), lead by Martin Kreuzer in Passau, which is built upon CoCoA and CoCoALib. It applies both symbolic and numerical computation to tackle "real world" problems.

All the new code is free and open source software. It is downloadable from our website ([3]) and released under GPL.

CoCoALanguage

The design and development of the new mathematical core of CoCoA was conducted by mathematicians (the authors of this paper); in contrast the design of the language, parser, and interpreter was ably assisted by Giovanni Lagorio, computer scientist and expert in languages — a most welcome addition to the CoCoA team!

Our main challenge was to design a more powerful language while keeping it as compatible as possible with the language in CoCoA-4.

In the new language rings and functions are "normal objects", more properly called "first class values", and can be assigned and passed as arguments, thus avoiding some of the convolutions needed in CoCoA-4.

We decided to remove certain "features" which often led to ambiguities, frustration for beginners, or hidden bugs (code working with no error messages, but

doing the wrong thing). One of the nice "features" of CoCoA was letting the user write `A B` as a shortcut for `A*B`. This had a number of unfortunate implications; perhaps the most painful was that a forgotten "`;`" would become a multiplication with unexpected results!

So we came to the hard decision to require always "`*`" for multiplication. But do not worry! Where the old way is truly handy, *e.g.* when writing power-products in polynomials, we offer the `*** ... ***` shortcut inside which the "old rules" apply:

```
I := *** Ideal(2x^2y-z, 3xz-5yz^3) ***;
```

Improved Errors!

The new design of the CoCoALanguage and the careful implementation of the parser and interpreter allow far superior handling of errors.

All CoCoA-4 users have surely encountered an unhelpful error message like this:

```
ERROR: parse error in line 21
```

The new error messages will tell you what and where the error was:

```
If N>1; Then F := (x-1)^N; Else ....

ERROR:
I was expecting "Then" but I've found ";"
If N>1; Then F := (x-1)^N; Else
      ^
```

Also for errors during evaluation the messages are equally informative. Moreover, as the true error often does not lie in the function which signalled it but in the function which called it (or in the function which called that one, or ...), the new error messages include the list of the location of the calls in the stack.

So when we ask the users who have already switched to CoCoA-5 for their comments they say: "CoCoA's new errors are really great!" ;-)

Mathematical Foundations

The greatest change in the "mathematical part" comes from the fact that the new core (CoCoALib) was designed by a mathematician: the internal data types are carefully implemented to reflect their mathematical underpinnings.

In particular there is a greater variety of ring constructors (see below in Section CoCoALib), and any commutative ring can be used as the ring of coefficients of polynomial rings.

In parallel with this flexibility in ring construction CoCoA-5 offers proper ring homomorphisms to map ring elements (`RingElem`) between rings.

Both rings and ring homomorphisms are "first class values", so they can be assigned and passed as arguments. Ring homomorphisms can be called as functions and can be composed, as we see here:

```
R ::= QQ[a,b];
K := NewFractionField(R);
Use P ::= K[x,y,z];

G := (1/a)*x + 2*y;
LC(G);  -- leading coefficient
1/a
LT(G);  -- leading term
x
Use S ::= K[x];
phi := PolyAlgebraHom(P, S, [x,1,0]);
phi(G);
(1/a)*x +2
psi := PolyAlgebraHom(S, K, [100]);
f := psi(phi);  -- composition
f(G);
(2*a +100)/a
```

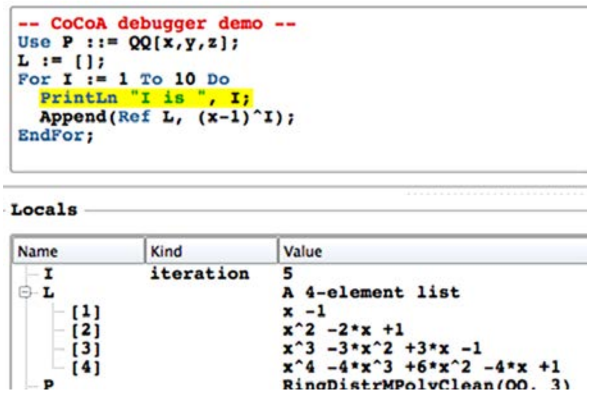
User Interfaces

The CoCoA system provides three user interfaces: plain text, Emacs, and a custom graphical user interface (abbr. GUI).

Fans of the Emacs interface (as we are) will be pleased to know that "Nothing's changed"! Apart from a handful of small fixes and improvements — it is difficult to improve what is already almost perfect ;-)

The new GUI is still under development; it already boasts several improvements and interesting new features. The new input editor has coloured syntax and an indicator for balanced parenthesis: very useful against silly typos! A handy new feature is the "Reported Location" menu, which will take you to the exact spot where the errors were signalled.

Another special feature (alas! not available in the Emacs interface) is the debugger window in which the user can execute the CoCoA code step by step while monitoring the values of the variables.



Adding Functions to CoCoA

We are not alone in developing CoCoA! Certainly, we are constantly adding new features; but we are also delighted when external contributors give us software donations. So, both for ourselves and for CoCoA users /contributors, we have made it easier to add new functions to CoCoA.

In CoCoA-4 the usual way to extend its capabilities was to encapsulate your CoCoALanguage functions in a `Package` which can then be passed to your colleagues (or, better, to the CoCoA authors!) We have simplified this process in CoCoA-5.

One guiding principle when we designed the new CoCoALanguage was to ensure that well-written CoCoA-4 packages would need little or no change to work in CoCoA-5. Indeed many capabilities of CoCoA-4 were implemented as packages. Porting these packages to CoCoA-5 was just an easy stepping stone towards complete integration where the same capabilities will be fully integrated into CoCoALib (with anticipated improvements in speed).

In the new CoCoA there is a second alternative for adding new features: implement in C++ (as part of CoCoALib) then adjoin the new functions to CoCoA-5. A key point in the design of the new CoCoA interpreter was to facilitate the adjunction of CoCoALib functions to CoCoA-5, so they become readily accessible also from CoCoALanguage. After having added hundreds of functions this way, we can safely say it is almost as easy as writing new implementations in CoCoALanguage.

CoCoALib

The mathematical core of CoCoA-5 is the C++ library CoCoALib whose aims include offering better flexibility and performance while retaining the simplicity of use for which CoCoA has become widely appreciated.

CoCoALib is unique in its field because, right from the outset, it was designed as an open source library satisfying various design criteria:

- be easy and natural to use
- exhibit good run-time performance
- have a firm mathematical basis (following books [9, 10])
- be clear and well designed
- be clean and portable
- be well documented (both for users and maintainers)

This makes it an ideal choice as a basis upon which other researchers can develop efficient and robust implementations of their algorithms. Naturally we hope that many of these implementations will then be donated as new components for the library, helping to expand it.

We regard clear and comprehensible code as being generally more desirable than convoluted code striving for the highest possible speed. Conveniently, our experience up to now shows that this emphasis on cleanliness is also providing quite good run-time performance! In particular Gröbner bases computations are much faster than in the old CoCoA-4 software (written in C), and are now aligned with the other specialized systems Macaulay and Singular.

The inheritance mechanism of C++ plays a crucial role in the design of CoCoALib (see [1]), especially in the challenge of reconciling the traditionally conflicting goals of (mathematical) abstraction and efficiency: for example it is used to express the mathematical relationships between the various sorts of rings and their specific functions (*e.g.* `deg` for polynomial rings, `den` for fraction fields)

Being well aware that the usefulness of software is critically dependent on its documentation, we offer extensive documentation aimed both at guiding users and at aiding maintainers and contributors. And being even more aware that no one likes to read documentation, we also offer a good selection of example programs — so you can just cut-and-paste rather than read through the documentation!

Approximately...

CoCoALib is primarily concerned with computations in Commutative Algebra, and therefore with *exact* computations on polynomials, nevertheless it also offers some facilities for exploring the world of approximate algebra (see the book [6]). Two complementary approaches are: using *approximate computations* to solve *exact problems*, and applying Commutative Algebra "exact techniques" to solve *approximate problems*.

Twin-Float Arithmetic

A facility which CoCoALib offers for the first approach is twin-float arithmetic which can be used as a (generally) faster substitute for exact rational arithmetic with a heuristic guarantee of correctness. For full details see [2]; here we give just a brief intuitive outline.

Before computation begins, the user specifies a minimum acceptable accuracy. Then every (exact) rational input is converted into a *twin-float*: *i.e.* a *high precision* floating point value together with a *heuristic estimate* of the accuracy.

Every arithmetic operation on twin-float values checks that the heuristically estimated accuracy of the result is sufficient; if not, the operation fails. If no arithmetic step in our computation has failed the computation finishes and the result is (heuristically) guaranteed, otherwise we have to restart the entire computation specifying a higher precision.

Another special feature of twin-floats is the ability to recover a rational number from a twin-float value. This capability permits the recovery of the exact rational answer from a twin-float result under suitable circumstances; *e.g.* an exact Gröbner basis can be obtained from one computed using twin-floats.

The implementation in CoCoALib is as a `ring`, named `RingTwinFloat`, making it easy to use this arithmetic in a wide range of applications.

Approximate Border Bases

Given a set of *exact* points CoCoA can compute quickly the reduced Gröbner basis of the ideal of the polynomials vanishing at those points. But, when the points are

measurements coming from the *real world* then their coordinates are known only approximately.

In this approximate context, the notion of Gröbner basis, which is so important in exact commutative algebra, can exhibit a fatal weakness: it can be structurally unstable in the presence of infinitesimal perturbations. It has recently been shown that in the zero-dimensional case these problems of structural instability can be eliminated by using instead a Border Basis.

Together with C. Fassino and M.-L. Torrente we have developed the notions and theory necessary to apply the Buchberger-Möller algorithm to approximate points, and a robust prototype implementation is included in CoCoALib (see [5], [7]).

This is a rapidly developing topic, promising to be of definite interest to various aspects of both theoretical and practical research.

References

[1] J. Abbott: The Design of CoCoALib. In N. Takayama, A. Iglesias (eds.) Proceedings of ICMS 2006, LNCS 4151:205–215. Springer (2006)

[2] J. Abbott: Twin-Float Arithmetic. Journal of Symbolic Computation, in press: http://dx.doi.org/10.1016/j.jsc.2011.12.005 (2011)

[3] J. Abbott, A.M. Bigatti: CoCoALib: a C++ library for doing Computations in Commutative Algebra `http://cocoa.dima.unige.it/cocoalib/`

[4] J. Abbott, A.M. Bigatti, G. Lagorio: CoCoA-5.0: a system for doing Computations in Commutative Algebra `http://cocoa.dima.unige.it/`

[5] J. Abbott, C. Fassino, M.L. Torrente: Stable border basis for ideals of points, Journal of symbolic computation 43:883–894 (2008)

[6] J. Abbott, L. Robbiano, (eds.): Approximate Commutative Algebra, Springer (2009)

[7] Fassino, C.: Almost Vanishing Polynomials for Sets of Limited Precision Points, Journal of symbolic computation 45, 19–37 (2010)

[8] M. Kreuzer *et al.* The ApCoCoA Project, `http://www.apcocoa.org/`

[9] M. Kreuzer, L. Robbiano: Computational Commutative Algebra 1, Springer, Heidelberg (2000, 2008)

[10] M. Kreuzer, L. Robbiano: Computational Commutative Algebra 2, Springer, Heidelberg (2005)

Klassifikation simplizialer Arrangements mit dem Computer

Michael Cuntz
(TU Kaiserslautern)

cuntz@mathematik.uni-kl.de

Simpliziale Arrangements sind geometrische Objekte, die elementar definiert werden können und dennoch in tiefen Gebieten der Mathematik eine wichtige Rolle spielen. Ursprünglich wurden sie 1941 von Melchior [13] eingeführt aber daraufhin jahrzehntelang wenig beachtet. Erst 1971 stellte Grünbaum [8] eine Sammlung aller bekannten simplizialen Arrangements in der reellen projektiven Ebene zusammen. Er schrieb, dass sie eine sehr natürliche Struktur seien und in der Lösung vieler Probleme über Arrangements auftauchen. Tatsächlich waren kurze Zeit später (1972) simpliziale Arrangements der zentrale Gegenstand in Delignes [7] Lösung der Vermutung von Brieskorn, dass das Komplement der Vereinigung aller Spiegelungshyperebenen einer Spiegelungsgruppe im (komplexifizierten) Raum die $K(\pi, 1)$-Eigenschaft besitzt.

Seither wurden ab und zu neue Arrangements entdeckt (auch in höheren Dimensionen); 2008 fasste Grünbaum [10] seine Sammlung der simplizialen Arrangements in der projektiven Ebene zu einem neuen, leichter zugänglichen Katalog zusammen. Nur wenig früher entstand eine neue Symmetriestruktur: Das *Weyl-Gruppoid* wurde als Invariante von gewissen Hopf-Algebren, sogenannten Nichols-Algebren, entdeckt. Nachdem das Weyl-Gruppoid axiomatisch und von Nichols-Algebren losgelöst von Heckenberger und Yamane beschrieben wurde, folgte eine Serie von Arbeiten, die schließlich zur Klassifikation der *endlichen* Weyl-Gruppoide führte [4]. Erst im Nachhinein stellte sich heraus [12], [2], dass diese einer großen Klasse von simplizialen Arrangements entsprechen, die wir *kristallographisch* nennen.

Die Klassifikation der kristallographischen Arrangements besteht aus mehreren Teilen. Zunächst müssen wichtige Sätze über Weyl-Gruppoide bewiesen werden. In den Dimensionen drei bis acht gibt es dann allerdings 74 exzeptionelle kristallographische Arrangements, für die bisher keine generische Konstruktion bekannt ist. Diese zu finden und zu zeigen, dass es keine weiteren gibt, ist Aufgabe des Computers: Es muss ein riesiger Suchbaum durchlaufen werden. Nur durch mehrere entscheidende Abbruchkriterien hat dieser Baum endlich viele Blätter und kann dann in wenigen Tagen durchforstet werden. Eine Klassifikation von simplizialen Arrangements im Allgemeinen wird eine noch größere Anzahl von Ausnahmen behandeln müssen und ist daher möglicherweise ohne Computer nahezu ausgeschlossen.

In diesem Artikel erklären wir zunächst die theoretischen Grundlagen und erläutern dann die aktuellen Klassifikationsansätze mit dem Computer.

Arrangements von Hyperebenen

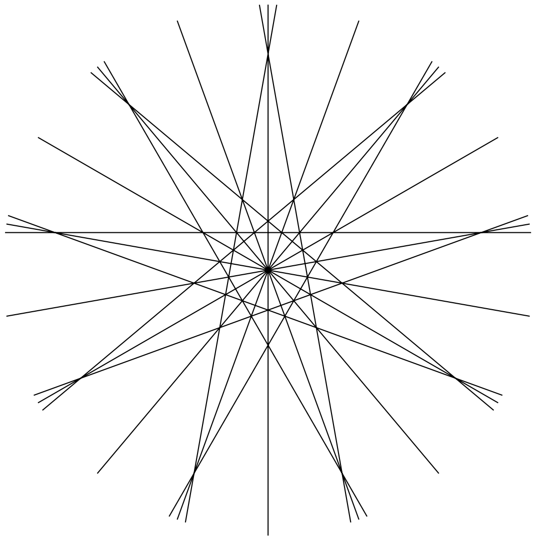


Abbildung 1: *Ein simpliziales Arrangement.*

Ein *Arrangement von Hyperebenen* in V ist eine endliche Menge $\mathcal{A}$ von Hyperebenen in einem endlichdimensionalen Vektorraum V. Wir wollen uns hier auf den Fall beschränken, dass V ein reeller Vektorraum ist, also $V = \mathbb{R}^r$ für ein $r \in \mathbb{N}$, und wir nehmen an, dass alle Hyperebenen in $\mathcal{A}$ linear sind, also den Nullpunkt enthalten. Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^r \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{A}} H$ heißen *Kammern* von $\mathcal{A}$. Das Arrangement $\mathcal{A}$ heißt ein *simpliziales Arrangement*, falls alle Kammern offene simpliziale Kegel sind, d.h., für jede Kammer K gibt es $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^r$ mit

$$K = \Big\{ \sum_{i=1}^{r} a_i v_i \mid a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}_{>0} \Big\}.$$

Ist etwa $r = 3$, so kann man ein Arrangement $\mathcal{A}$ leicht zweidimensional zeichnen: Man wähle eine affine Hyperebene H, die nicht durch Null geht, und bilde den Schnitt aller Hyperebenen von $\mathcal{A}$ mit H. Damit wird $\mathcal{A}$ als eine Ansammlung von Geraden in der (projektiven) Ebene dargestellt. Genau dann, wenn $\mathcal{A}$ simplizial ist,

bilden diese Geraden eine Triangulierung der projektiven Ebene (also der Sphäre), siehe z. B. Abb. 1. Die Dreiecke entsprechen den Kammern des Arrangements.

Kristallographische Arrangements

Die Klasse von Arrangements, die bei der Untersuchung der Weyl-Gruppoide entdeckt wurde, sind die sogenannten *kristallographischen Arrangements*: Es sei $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$ ein simpliziales Arrangement in $V = \mathbb{R}^r$. Wir wählen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V^*$ derart, dass $H_i = \ker \alpha_i$, für $i = 1, \dots, n$. Es sei $R := \{\pm\alpha_1, \dots, \pm\alpha_n\}$. Nun kann man sich überlegen, dass es wegen der Simplizialität von $\mathcal{A}$ zu jeder Kammer K von $\mathcal{A}$ eine eindeutige Basis $B^K = \{\beta_1, \dots, \beta_r\} \subseteq R$ von V^* gibt, derart dass die zu B^K duale Basis den Kegel K aufspannt (siehe Abbildung 2).

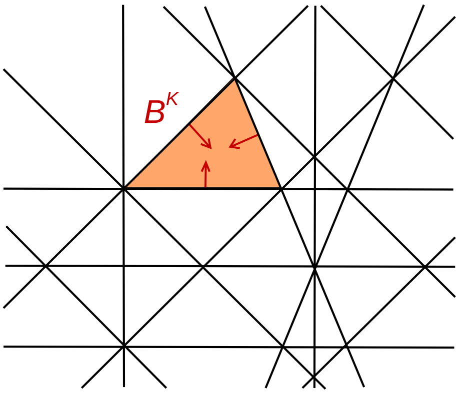


Abbildung 2: *Eine Kammer K mit ihrer Basis B^K.*

Wir nennen $(\mathcal{A}, R)$ ein kristallographisches Arrangement, wenn für alle Kammern K von $\mathcal{A}$ gilt:

$$R \subseteq \sum_{\alpha \in B^K} \mathbb{Z}\alpha.$$

Äquivalent hierzu ist, dass alle Koordinaten von Erzeugern von Kammern (bis auf lineare Isomorphismen) im Gitter $\mathbb{Z}^r$ gewählt werden können, und daraufhin die Basiswechselabbildungen zwischen den zugehörigen Basen ganzzahlig sind.

Kristallographische Arrangements bilden eine große Teilklasse der simplizialen Arrangements. Zum Beispiel gibt es im Fall $r = 3$ bisher 118 bekannte simpliziale Arrangements mit weniger als 38 Hyperebenen; 55 davon sind kristallographisch.

Das Weyl-Gruppoid

Der Schlüssel zur Klassifikation der kristallographischen Arrangements sind die zugehörigen Weyl-Gruppoide. Haben wir zwei benachbarte Kammern K und K' eines Arrangements $\mathcal{A}$ mit den entsprechenden Basen B^K und $B^{K'}$, so stellt sich heraus, dass es eine eindeutige lineare Abbildung $\sigma : V^* \to V^*$ gibt, die B^K auf $B^{K'}$ abbildet und als Matrix bezüglich der Basis B^K keine Nullen auf der Diagonalen hat. Das *Weyl-Gruppoid* von $\mathcal{A}$ ist die Kategorie, die die Kammern von $\mathcal{A}$ als Objekte und Verknüpfungen von Abbildungen σ wie eben als Morphismen hat (siehe z. B. Abb. 3).

Ist $\mathcal{A}$ die Menge der Spiegelungshyperebenen einer Weyl-Gruppe W (also einer kristallographischen Spiegelungsgruppe), so ist $\mathcal{A}$ ein kristallographisches Arrangement, und das zugehörige Weyl-Gruppoid ist W. Die obige Menge R spielt für das Weyl-Gruppoid dieselbe Rolle wie das Wurzelsystem von W für die Weyl-Gruppe.

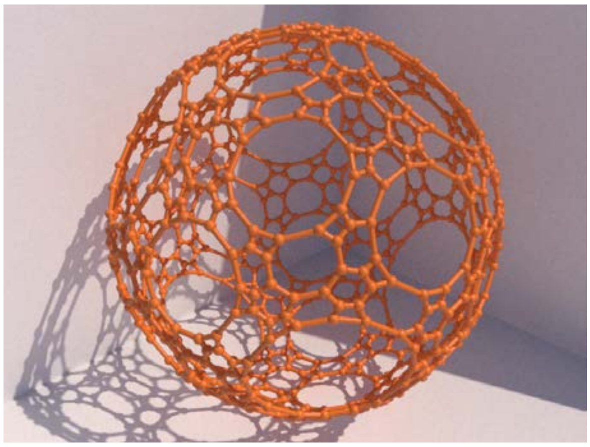


Abbildung 3: *Das „größte“ Weyl-Gruppoid in Dimension drei: Die Knoten entsprechen den Kammern und die Kanten entsprechen den Spiegelungen σ.*

Die Klassifikation der kristallographischen Arrangements

Die Klassifikation der kristallographischen Arrangements teilt sich (im wesentlichen) in drei Fälle auf: Dimension zwei, Dimension drei bis acht und Dimension größer als acht.

In Dimension zwei gibt es unendlich viele kristallographische Arrangements. Sie werden parametrisiert durch Triangulierungen von konvexen n-Ecken durch Diagonalen, die sich nicht überschneiden (siehe [5]).

In Dimension $r > 2$ ist die Situation ganz anders. Sind $(\mathcal{A}, R)$ ein kristallographisches Arrangement und B^K die ausgezeichnete Basis von V^* zu einer Kammer K, so folgt aus der Simplizialität von $\mathcal{A}$, dass die Koordinaten eines $\alpha \in R$ bezüglich B^K alle nicht-negativ oder nicht-positiv sind, d.h., wir können R (bezüglich der Kammer K) schreiben als $R = R_+ \cup -R_+$ mit

$$R_+ = R \cap \sum_{\alpha \in B^K} \mathbb{N}_0\alpha.$$

Der folgende Satz wird mithilfe des Weyl-Gruppoids bewiesen:

Satz ([6, Thm. 2.10]) Ist $\alpha \in R_+$, so ist entweder $\alpha \in B^K$, oder es gibt $\beta, \gamma \in R_+$ mit $\alpha = \beta + \gamma$.

Dieser Satz liefert sofort einen Algorithmus zur Enumeration von kristallographischen Arrangements: Man beginne mit einer Basis von V^* und füge sukzessive Summen von zwei Elementen hinzu, bis man eine Menge R_+ konstruiert hat, die ein kristallographisches

Arrangement definiert. Hierbei sind natürlich nicht beliebige Summen erlaubt: Es gelten mehrere sehr starke Einschränkungen, etwa muss jedes neue Element zu allen relevanten „kristallographischen Unterarrangements“ kleinerer Dimension „kompatibel“ sein. Ein weiteres wichtiges Ergebnis ist eine Schranke für die Größe der Einträge der Morphismen in endlichen Weyl-Gruppoiden in Dimension drei.

Eine stark optimierte Implementierung dieses Algorithmus liefert in der Tat ein erstaunliches Ergebnis: In den Dimensionen $2 < r < 9$ gibt es nur endlich viele kristallographische Arrangements. Nutzt man die Tatsache, dass in Dimension acht alle kristallographischen Arrangements von Spiegelungsgruppen und einer weiteren einfach zu beschreibenden Serie herkommen, kann man durch Untersuchung der möglichen Dynkin-Diagramme zeigen, dass dem auch in höheren Dimensionen so ist. Wir erhalten den Satz:

Satz (Cuntz, Heckenberger, 2009/2010) Es gibt genau drei Familien von kristallographischen Arrangements:

(a) Eine Familie in Dimension 2, die durch Triangulierungen eines n-Ecks durch Diagonalen, die sich nicht überschneiden, parametrisiert wird,
(b) zu jeder Dimension $r > 2$ die klassischen Spiegelungsarrangements vom Typ A_r, B_r, C_r und D_r, und eine Serie von $r - 1$ weiteren Arrangements,
(c) eine Familie von 74 „sporadischen“ Arrangements in Dimension $2 < r < 9$ (unter anderem diejenigen zu den Weyl-Gruppen vom Typ F_4, E_6, E_7 und E_8).

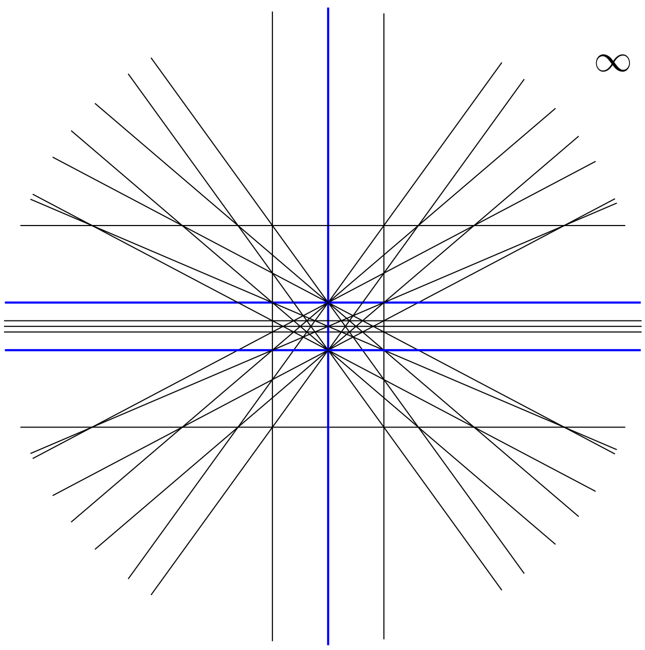


Abbildung 4: *Ein neues simpliziales Arrangement mit* 25 *Geraden. Entfernt man die blauen Geraden, so erhält man weitere neue simpliziale Arrangements mit* 22, 23 *und* 24 *Geraden.*

Implementierung

Der Algorithmus zur Aufzählung der kristallographischen Arrangements basiert hauptsächlich auf exakter linearer Algebra über $\mathbb{Q}^r$. Es ist also naheliegend diesen in einem CAS zu implementieren. Allerdings verbraucht ein solches System an diversen Stellen zu viel Zeit (etwa durch Interpretierung oder durch die Langzahlarithmetik, welche hier unnötig ist, da die Zahlen alle sehr klein bleiben). Ich schätze, dass ein CAS für die obige Klassifikation etwa ein Jahr bräuchte. Die bessere Methode scheint es hier zu sein, einen Prototyp im CAS zu implementieren (etwa in MAGMA oder in GAP), und aus diesem Prototyp ein C++-Programm zu erstellen.

Es ist sehr schwierig, Aussagen über die Laufzeit des Algorithmus zu treffen. In jeder festen Dimension $r > 2$ ist die Laufzeit endlich, aber in Abhängigkeit von r ist sie vermutlich exponentiell. Da wir für die Klassifikation aus theoretischen Gründen aber nur bis $r = 8$ rechnen müssen, spielt das letztendlich keine Rolle.

Simpliziale Arrangements

Die Klassifikation der simplizialen Arrangements im Allgemeinen ist noch ein offenes Problem; auch eine effiziente Methode zur Enumeration ist noch nicht bekannt. Ein erster Ansatz, simpliziale Arrangements in der reellen projektiven Ebene aufzuzählen, der aber noch nicht weit genug reicht, besteht darin, die allgemeineren Arrangements von Pseudogeraden zu betrachten. Ein *Arrangement von Pseudogeraden* ist eine Familie von einfachen geschlossenen Kurven in der reellen projektiven Ebene (oder auf der 2-Sphäre) derart, dass je zwei Kurven genau einen Punkt gemeinsam haben (auf der Sphäre zwei), siehe z. B. Abb. 5.

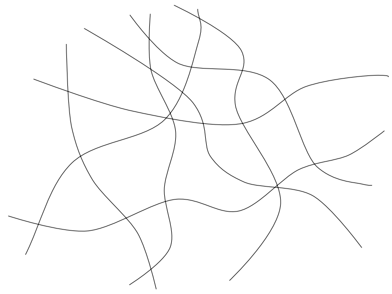


Abbildung 5: *Ein Ausschnitt aus einem Arrangement von Pseudogeraden.*

Ein Arrangement von Pseudogeraden heißt *dehnbar*, falls es ein Arrangement von Geraden mit derselben Inzidenz, also demselben Schnittverhalten gibt. Dass es Arrangements von Pseudogeraden gibt, die nicht dehnbar sind, zeigt der Satz von Pappus (siehe Abb. 6, vergleiche [9, Thm. 3.1]):

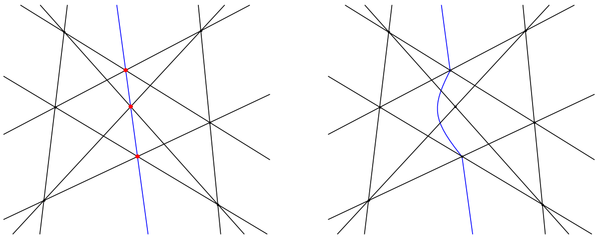


Abbildung 6: *Satz von Pappus.*

Mit den im linken Bild vorgegebenen schwarzen Geraden (und dieser Inzidenz), liegen drei der Schnittpunkte auf einer Geraden (der blauen Geraden). Legt man nun (rechts) eine blaue Pseudogerade so, dass sie nur zwei dieser Punkte trifft, so ist das Arrangement nicht mehr dehnbar.

Verzerrt man ein Arrangement von Pseudogeraden ein wenig, so kann man erreichen, dass es zu einem *„Wiring"-Diagramm* wird (siehe Abb. 7). Wir lassen eine formale Definition aus, weil sie etwas technisch ist; merken sollten wir uns lediglich, dass jede Gerade auf dem Weg von links nach rechts jede andere Gerade genau einmal passiert haben muss.

Satz (Goodman, Pollack) Jedes Arrangement von Pseudogeraden ist isomorph zu einem Wiring-Diagramm.

Dadurch wird das Arrangement mittels der Kombinatorik der Überkreuzungen kodiert. Diese Kombinatorik lässt sich wiederum leicht aufzählen, allerdings erhält man damit auch alle nicht dehnbaren Arrangements und verschlechtert somit die Laufzeit der Enumeration erheblich.

Simplizialität ist auch bei Arrangements von Pseudogeraden eine starke Einschränkung. Eine Enumeration von simplizialen Wiring-Diagrammen liefert eine vollständige Liste aller simplizialen Arrangements in der reellen projektiven Ebene mit bis zu 27 Geraden (siehe [3]).

Dabei finden sich tatsächlich vier neue Arrangements (siehe Abb. 4), die im eingangs erwähnten Katalog von Grünbaum fehlen. Außerdem erhalten wir einen Beweis für die folgende Vermutung:

Vermutung ([9, Conj. 1], [1, 6.3] oder [11, 3.1]) Alle simplizialen Arrangements mit höchstens 14 Pseudogeraden sind dehnbar.

Es gibt sehr viele simpliziale Arrangements mit mehr als 14 Pseudogeraden, die nicht dehnbar sind. Meistens verletzen diese Arrangements den Satz von Pappus, aber in ganz seltenen Fällen muss man mithilfe eines Gleichungssystems und Gröbnerbasen beweisen, dass sie tatsächlich nicht dehnbar sind.

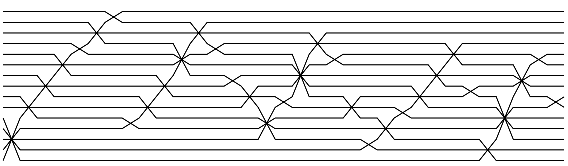


Abbildung 7: *Ein nicht dehnbares Wiring-Diagramm mit* 15 *Pseudogeraden.*

Ausblick

Die Klassifikation der simplizialen Arrangements scheint durch Unterstützung des Computers mittlerweile in Reichweite zu sein. Denkbar wären zur Lösung etwa Verallgemeinerungen der Sätze, die im Fall der kristallographischen Arrangements entscheidend waren. Die Entdeckung des Weyl-Gruppoids wirft auch noch viele weitere Fragen auf, allen voran, welche weiteren Ergebnisse über Spiegelungsgruppen in diese neue Richtung übertragen werden können. Außerdem haben sich jetzt schon einige Verbindungen zu anderen Gebieten herausgestellt, z. B. zu Cluster-Algebren und zu torischen Varietäten.

Literatur

[1] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, und G.M. Ziegler, *Oriented matroids*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 46, Cambridge University Press, 1993.

[2] M. Cuntz, *Crystallographic arrangements: Weyl groupoids and simplicial arrangements*, Bull. London Math. Soc. **43** (2011), no. 4, 734–744.

[3] ______, *Simplicial arrangements with up to 27 lines*, arXiv:1108.3000v1 (2011), 18 S.

[4] M. Cuntz und I. Heckenberger, *Finite Weyl groupoids*, `arXiv:1008.5291v1` (2010), 35 S.

[5] ______, *Reflection groupoids of rank two and cluster algebras of type A*, J. Combin. Theory Ser. A **118** (2011), no. 4, 1350–1363.

[6] ______, *Finite Weyl groupoids of rank three*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 1369–1393.

[7] Pierre Deligne, *Les immeubles des groupes de tresses généralisés*, Invent. Math. **17** (1972), 273–302.

[8] B. Grünbaum, *Arrangements of hyperplanes*, Proc. of the Second Louisiana Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Louisiana State Univ., Baton Rouge, La., 1971), S. 41–106.

[9] ______, *Arrangements and spreads*, AMS Providence, R.I., 1972, CBMS Regional Conf. Series in Math., No. 10.

[10] ______, *A catalogue of simplicial arrangements in the real projective plane*, Ars Math. Contemp. **2** (2009), no. 1, 25 S.

[11] ______, *Small unstretchable simplicial arrangements of pseudolines*, Geombinatorics **18** (2009), 153–160.

[12] I. Heckenberger und V. Welker, *Geometric combinatorics of Weyl groupoids*, J. Algebr. Comb. **34** (2010), no. 1, 115–139.

[13] E. Melchior, *Über Vielseite der projektiven Ebene*, Deutsche Math. **5** (1941), 461–475.

Computeralgebra in der Schule – Stand der Dinge!?

Gilbert Greefrath, Jan Hendrik Müller (Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Rivius-Gymnasium Attendorn)

greefrath@uni-muenster.de
jan.mueller@math.uni-dortmund.de

Im Spätherbst 2010 wurden die Autoren als Fachexperten für Schule bzw. Lehre und Didaktik in die Fachgruppenleitung der Fachgruppe Computeralgebra neu berufen. Wir möchten diesen Anlass nutzen, um aktuelle Entwicklungen des CAS-Einsatzes in der Schule aus unserer Sicht zu skizzieren. Das betrifft einerseits eine Diskussion der technischen Möglichkeiten eines CAS-Einsatzes an Schulen und andererseits eine Reflexion über fachdidaktische Aspekte des Einsatzes von CAS im Mathematikunterricht.

Technische Möglichkeiten eines CAS-Einsatzes an Schulen

Die Vielfalt und kostengünstige Verfügbarkeit an CA-Systemen nimmt in erfreulicher aber zugleich auch fast unüberschaubarer Weise zu. Waren es vor kurzem noch ausschließlich kommerzielle Programme (z. B. Derive oder Maple) oder Taschencomputer im Preissegment von etwa 100 Euro (z. B. TI-Nspire oder Casio Classpad), so ist mittlerweile intuitiv gut bedienbare Software kostenlos downloadbar (z. B. wxMaxima oder Geogebra[1]). Alternativ besteht auch die Möglichkeit CAS-Oberflächen online zu nutzen (z. B. WIRIS oder Omega) oder als „portable“ Version z. B. von einem USB-Stick zu starten (z. B. Maxima Portable[2]). Dies ist gerade für Schulen besonders interessant, da keine Installation der Software im Schulnetzwerk erforderlich ist. Österreich hat sogar eine landesweite Lizenz für WIRIS[3] erworben. Für Deutschland existiert noch keine solche Vereinbarung; eine solche landesweite Lösung für Schulen und Universitäten wäre aber zu begrüßen. Nach Auskunft der Entwickler von WIRIS kann die Oberfläche im Netz auch außerhalb von Österreich für bis zu 1000 Berechnungen für Testzwecke frei genutzt werden. Eine kostenlose aber leider nicht so bedienungskomfortable Alternative zu WIRIS ist z. B. Omega[4], das auch auf mobilen Endgeräten arbeitet.

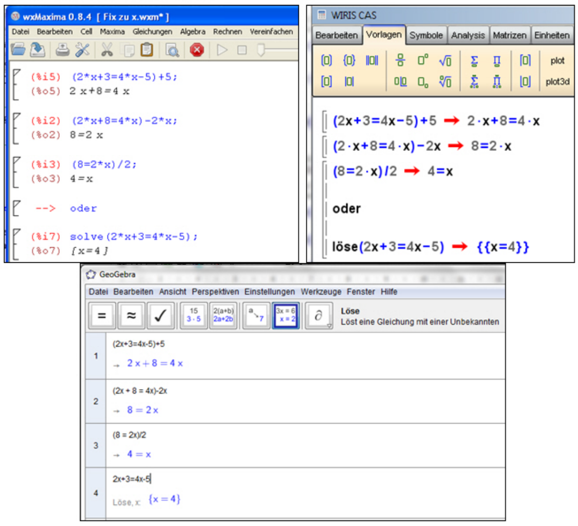


Abbildung 1: *Gleichungen umformen bzw. lösen mit wxMaxima, WIRIS und Geogebra*

Zudem sind inzwischen auch CAS-Applets online nutzbar. Diese können beispielsweise für die individuelle Förderung der Lernenden eingesetzt werden. Auf der WisWeb-Seite[5] des Freudenthal-Instituts in Utrecht findet man eine Vielzahl von CAS unterstützten Algebra-Applets, die von Lernenden sowohl im Unterricht als auch anschließend daheim zum Üben von grundlegenden Fertigkeiten in algebraischen Bereichen

[1] Link zur Downloadseite von wxMaxima: http://sourceforge.net/projects/maxima/files/ oder auch Geogebra mit CAS. Der Webstart der Beta Version ist verfügbar unter http://www.geogebra.org/webstart/4.2/geogebra-42.jnlp

[2] Link zur Downloadseite: http://www.permucode.com/maxima/

[3] Link zur Online-Plattform: http://wiris.schule.at/de_en/index.html (von „Maths for more“ für Schulen in Österreich bereitgestellt)

[4] Link zur Seite von Omega: http://www.vroomlab.com:8081/nhome

[5] Geometrie und Algebra Applets des Freudenthal Instituts in Utrecht:http://www.fi.uu.nl/wisweb/en/

wie der Term- oder Gleichungsumformung genutzt werden können. Die Rückmeldungen von Schülerinnen und Schülern, die in die Nutzung der Applets eingeführt wurden, waren positiv. Zudem bestätigten viele schwächere Schülerinnen und Schüler, diese Applets auch privat zu nutzen.

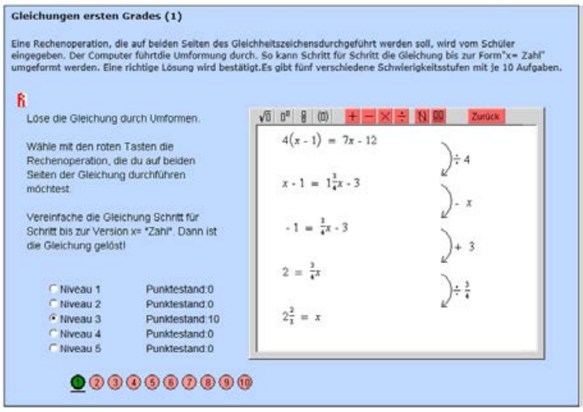


Abbildung 2: *Gleichungsumformung mit einem CAS-Applet*

CAS oder nicht-CAS?

Auch schon in der Schulmathematik der Sekundarstufe I kann es an einigen Stellen interessant sein, ein CAS statt eines grafikfähigen numerischen Taschenrechners zur Verfügung zu haben. Die entsprechenden Geräte nähern sich allerdings immer weiter an, so dass man ohne den CAS-Hinweis des Herstellers bei manchen Funktionen auf den ersten Blick nicht erkennen kann, ob der Taschenrechner nun tatsächlich mit einem CAS oder aber mit einem raffinierten numerischen Verfahren arbeitet. Sogar sehr günstige Taschenrechner (z. B. TI30XPRO oder CASIO fx991DE PLUS) besitzen mittlerweile die Möglichkeit Primfaktorzerlegungen, Wurzelfaktorisierungen oder auch Gleichungslösungen durchzuführen, die in bestimmten Bereichen so exakt arbeiten als ob CAS-Routinen benutzt würden. Die Screenshots in Abb. 3 zeigen z. B., wie der CASIO fx991ES Wurzelausdrücke umformt:

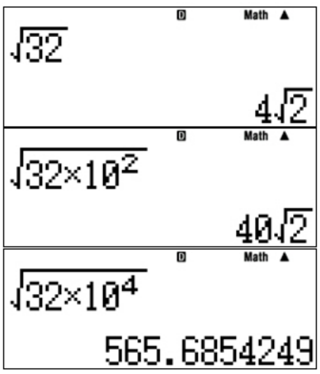


Abbildung 3: *Berechnung von Wurzelausdrücken*

Man könnte zunächst (beim oberen und mittleren Bild von Abb. 3) den Eindruck gewinnen, dass ein CAS genutzt wurde. CA-Systeme zeichnen sich u. a. jedoch dadurch aus, dass sie derartige Termumformungen für beliebig große Zahlen durchführen können. Mit einem CAS sollte der Taschenrechner demzufolge alle Ausdrücke der Form $\sqrt{32 \cdot 10^{2n}}$ symbolisch zu $4 \cdot 10^n \sqrt{2}$ umformen können. Ein CAS kann hier also wegen des unteren Bildes in Abb. 3 nicht vorliegen. Dass die zugrundeliegenden numerischen Algorithmen jedoch sensible Fehlerschranken haben, zeigt das in Abb. 4 wieder mit dem CASIO fx991ES ermittelte (und im Übrigen gar nicht so leicht zu begründende) Rechenergebnis zu den Termen $\sqrt[3]{11+4\sqrt{29}} + \sqrt[3]{11-4\sqrt{29}}$ und $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$, wohingegen wxMaxima uns mit den in Abb. 5 dargestellten Ergebnissen überrascht. Im Übrigen liefern beide Systeme mit unseren Berechnungen jeweils nur die reellen dritten Wurzeln.

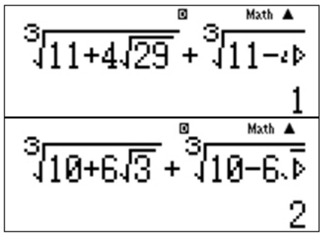


Abbildung 4: *Kubische Wurzelausdrücke mit dem CASIO fx991ES berechnet*

Die Wurzelausdrücke lassen sich gut mit Hilfe des Arbeitsblattes (s. Abb. 9) oder den Formeln von Cardano finden.[6]

```
z:(11+4*sqrt(29))^(1/3)+(11-4*sqrt(29))^(1/3)$
float(z);
1.0
```

```
z:(10+6*sqrt(3))^(1/3)+(10-6*sqrt(3))^(1/3)$
float(z);
2.00000000001
```

Abbildung 5: *Kubische Wurzelausdrücke mit wxMaxima numerisch berechnet*

Da Gleitkommaarithmetik inhärent approximativ ist[7], liefert der Zugang über Langzahlarithmetik (in Abb. 6 dargestellt bezogen auf 1000 signifikante Nachkommastellen) das „gewünschte" Resultat.

```
bfloat((10+6*sqrt(3))^(1/3)+(10-6*sqrt(3))^(1/3)),fpprec:1000;

2.0b0
```

Abbildung 6: $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$ *auf 1000 Nachkommastellen approximiert*

[6]Eine lesenswerte Ausführung zu den Formeln von Cardano, die auch die historische Genese dieser Zahlen betrachtet, findet man z. B. bei Humenberger (2011)

[7]In diesem Zusammenhang ist der Artikel „What every computer scientist should know about floating-point arithmetic" von David Goldberg lesenswert. Er ist verfügbar unter http://www-users.math.umd.edu/~jkolesar/mait613/floating_point_math.pdf

Didaktische Möglichkeiten eines CAS-Einsatzes an Schulen

Das Beispiel aus Abb. 5 zeigt, dass nicht alle arithmetisch-algebraischen Probleme aus dem Bereich der Schulmathematik problemlos mit CAS lösbar sind. Daher muss die CAS-Nutzung im Unterricht mit der Vermittlung der entsprechenden Werkzeugkompetenz einhergehen. Bei Drijvers (2011) findet man einige Anregungen, wie CAS in der Schule eingesetzt werden kann. Er sieht die Verwendung von CAS beim Problemlösen, beim Üben und beim Erwerb algebraischer Kompetenzen.

CAS als Hilfe beim Erwerb algebraischer Kompetenzen

Das CAS kann beim Erwerb algebraischer Kompetenzen eingesetzt werden. Dazu müssen besonders in der Sekundarstufe I neue Konzepte entwickelt werden. Ein Beispiel dafür sind die Ideen aus dem Beitrag „Mach Otto zur Null“ (Pinkernell & Diemer 2011) zur Einführung von Termumformungen. Weitere Konzepte für den Einstieg in algebraische Umformungen werden benötigt. Als Anregung dazu wollen wir ein Beispiel aus der Unterrichtspraxis betrachten: Auch heutzutage werden Verfahren, wie etwa die Bestimmung der Nullstellen einer quadratischen Gleichung mit Hilfe der p-q-Formel, immer noch unverstanden ausgeführt. Dabei geht es aus mathematischer Sicht zunächst gar nicht um das konkrete Bestimmen von Nullstellen sondern vorrangig um die Frage nach der Existenz einer allgemeinen Formel zur Lösung quadratischer Gleichungen. Dass das nicht selbstverständlich ist, kann beispielsweise anhand der Gleichung $x^5 + px + q = 0$ verdeutlicht werden. Aus vielerlei Gründen wäre es demnach vernünftiger, sich zunächst im Kontext quadratischer Gleichungen auf die Strategie der quadratischen Ergänzung zu beschränken und diese vor allem anschaulich bzw. geometrisch zu motivieren. Dann könnte die „p-q-Formel“ sogar mit Hilfe eines CAS ermittelt und verwendet werden (vgl. Abb. 7).

Mit der zuvor erworbenen Strategie der quadratischen Ergänzung und Termumformungen kann man nun die Problematik der verschiedenen Darstellungen der gleichen Formel im CAS oder einer Formelsammlung bearbeiten. Gleichzeitig ergibt sich die Möglichkeit für Lernende selbständig weiter zu forschen (vgl. Abb. 8).

```
solve(x^2+p*x+q=0,x);
```

$$\left[x=-\frac{\sqrt{p^2-4\,q}+p}{2},\ x=\frac{\sqrt{p^2-4\,q}-p}{2}\right]$$

Abbildung 7: *Die „p-q-Formel“ liefert ein CAS*

```
solve(a*x^2+b*x+c=0,x);
```

$$\left[x=-\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}+b}{2\,a},\ x=\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a}\right]$$

```
solve(a*x^2+b*x+c=d,x);
```

$$\left[x=-\frac{\sqrt{4\,a\,d-4\,a\,c+b^2}+b}{2\,a},\ x=\frac{\sqrt{4\,a\,d-4\,a\,c+b^2}-b}{2\,a}\right]$$

Abbildung 8: *„Die Mitternachtsformel“ & Co.*

Der Einsatz von CAS bietet für den Mathematikunterricht also auch die Möglichkeit, Formeln ausgehend von einer vom Rechner vorgegebenen Darstellung „top-down“ herzuleiten[8], statt sie wie bisher im Unterricht „bottom-up“ mit möglicherweise unklarer Zielvorstellung zu erarbeiten. Nutzt man ein CAS auf diese Weise, so sind die Ziele der Termumformungen klar definiert, Termumformungen werden intensiv geübt und der Unterricht kann zudem binnendifferenziert organisiert werden, da sich wie in Abb. 8 mit dem CAS neue Möglichkeiten für eigenständige Experimente der Schülerinnen und Schüler ergeben.

CAS als Hilfe beim Üben algebraischer Kompetenzen

CAS kann beim Üben algebraischer Kompetenzen eingesetzt werden. Besonders gut können fertig erstellte Applets hierzu eingesetzt werden. CAS-Applets wie das in Abb. 2 dargestellte des Freudenthal-Instituts Utrecht findet man in zunehmender Anzahl im Internet.

CAS als Hilfe beim Problemlösen

Für den Einsatz von CAS beim Problemlösen gibt es eine Fülle von Unterrichtsvorschlägen und Problembeschreibungen (z. B. Arbeitsblatt „Seltsame Zahlen“ in Abb. 9). Es fehlt aber noch an konkreten und evaluierten Unterrichtsszenarien für den CAS-Einsatz beim Problemlösen. Ebenso fehlen Kriterien für die Erstellung von geeigneten Aufgaben für den CAS-Einsatz in Unterricht und Prüfungen. Dies zeigen z. B. verschiedene Ansichten über den Einsatz von CAS in Unterricht und zentralen Prüfungen (z. B. Kroll 2010) und die Tatsache, dass Prüfungsaufgaben für CAS-Klassen im Zentralabitur wie z. B. in Nordrhein-Westfalen nach wie vor kaum nachgefragt werden.

In jedem Fall ist für die Lösung mathematischer Probleme nach der Schulzeit die Nutzung verschiedener Strategien und Systeme von Vorteil, um z. B. ein Ergebnis auf Richtigkeit zu prüfen. Dies spricht dafür, digitale Mathematik-Werkzeuge im Unterricht möglichst vielfältig, also etwa zum Berechnen, Visualisieren, Kontrollieren, Experimentieren und Algebraisieren einzusetzen (Greefrath 2010).

An der deutlich erkennbaren Analogie zu der vor über 30 Jahren geführten Diskussion zum Einsatz des Taschenrechners im Mathematikunterricht kann man erkennen, dass nicht allein die technischen Möglichkeiten

[8] Das regionale Fachdidaktikzentrum Mathematik und Informatik greift die Idee z. B. unter folgender Adresse auf: `http://rfdz.ph-noe.ac.at/fileadmin/Mathematik_Uploads/GeoGebraCAS/Klasse3_Gleichungen_Unterrichtsmaterial.pdf`

über den praktischen Einsatz von CAS im Mathematikunterricht entscheiden, sondern auch die mit dem Einsatz verbundenen didaktischen Diskussionen und Möglichkeiten. Wir benötigen also didaktisch reflektierte und methodisch durchdachte Lernumgebungen für die neuen technischen Möglichkeiten, die eigenständiges Arbeiten ermöglichen und fördern sowie vor allem die selbstkritische Erziehung der Lernenden zum verantwortungsvollen Werkzeugeinsatz. Dazu gehört schließlich auch eine Sensibilisierung der Lernenden für die Entscheidung, was sie noch im Kopf berechnen und lösen können sollten und was sie dem CAS überlassen.

Literatur

[1] Drijvers, P.; Boon, P.; van Reeuwijk, M. (2011): Algebra and technology. In: Drijvers, P. (Hrsg.): Secondary Algebra Education, 179–202.

[2] Greefrath, G. (2010): Mit dem Computer qualitativ arbeiten? *Praxis der Mathematik in der Schule* 52 Bd. 31, 20–24

[3] Herget, W.; Heugl, H.; Kutzler, B.; Lehmann, E. (2001): Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar? *MNU* 54/8, 458–464.

[4] Humenberger, H. (2011): Wie können die komplexen Zahlen in die Mathematik gekommen sein? – Gleichungen dritten Grades und die Cardano-Formel. *ISTRON: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht.* Band 17, 31–45.

[5] Koepf, W. (2008): Was ist Computeralgebra? *Computeralgebra-Rundbrief*, Sonderheft zum Jahr der Mathematik.

[6] Kroll, W. (2010): Computer-Algebra-Systeme. Didaktische Überlegungen zum Einsatz im Unterricht in Prüfungen. *MNU* 63/5, 304–309.

[7] Pinkernell, G.; Diemer, C. (2011): Mach den Otto zur Null. *Computeralgebra-Rundbrief* 49, 22–26.

Seltsame Zahlen

Berechne die Zahl $\sqrt[3]{11+4\sqrt{29}}+\sqrt[3]{11-4\sqrt{29}}$ mit deinem Taschenrechner! Vertraust du dem Ergebnis? Könnte ein Rundungs- oder Rechenfehler vorliegen? Was meinst du?

Die folgenden Überlegungen zeigen eine Möglichkeit, wie man prüfen kann, ob das Ergebnis stimmt. Begründe hierfür die folgenden Schritte:

1) Aus $a=11+4\sqrt{29}$ folgt $x=\sqrt[3]{11+4\sqrt{29}}+\sqrt[3]{11-4\sqrt{29}} = \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{22-a}$

2) $$x^3=a+3\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\sqrt[3]{22-a}+3\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{22-a}\right)^2+22-a$$

3) $$x^3=22+3\left(\sqrt[3]{a^2(22-a)}+\sqrt[3]{a(22-a)^2}\right)$$

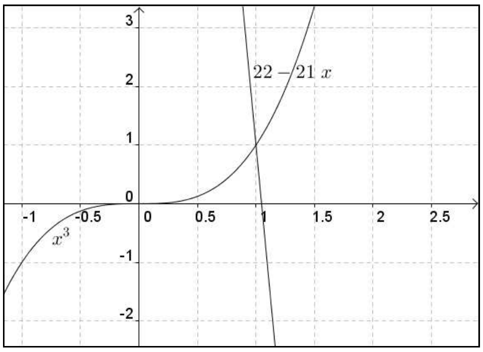
4) $$a^2=585+88\sqrt{29} \text{ und } (22-a)^2=585-88\sqrt{29}$$

5) $$x^3=22+3\left(\sqrt[3]{-3773-1372\sqrt{29}}+\sqrt[3]{-3773+1372\sqrt{29}}\right)$$

6) $$x^3=22-21\left(\sqrt[3]{11+4\sqrt{29}}+\sqrt[3]{11-4\sqrt{29}}\right)$$

7) $$x^3=22-21x$$

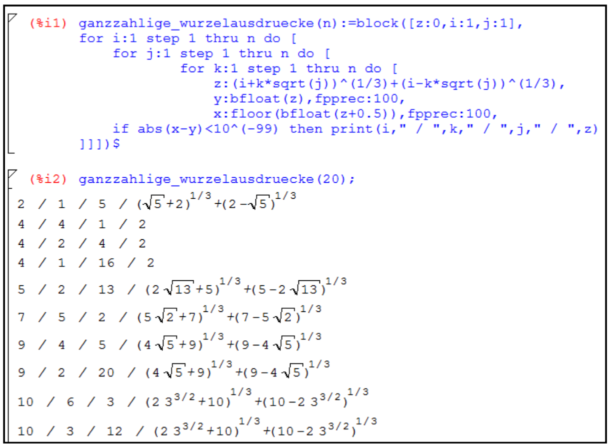
8) Der Plot von x^3 und $22-21\cdot x$ auf die Vermutung $x = 1$



9) Die Probe für $x = 1$ ergibt $1^3=22-21\cdot 1 \Leftrightarrow 1=1$. Daraus folgt …?

Mit dem CAS (Computer-Algebra-System) wxMaxima kann man, wie rechts abgebildet, weitere Zahlen dieser Art berechnen lassen.

- Wähle eine der Zahlen aus und versuche selber eine Begründung für dein Taschenrechnerergebnis zu finden!
- Warum erscheinen in drei Zeilen keine Wurzelausdrücke?
- Versuche, das Programm zu verstehen!
- Verändere das Programm und führe eigene Untersuchungen durch!



```
(%i1) ganzzahlige_wurzelausdruecke(n):=block([z:0,i:1,j:1],
      for i:1 step 1 thru n do [
          for j:1 step 1 thru n do [
                  for k:1 step 1 thru n do [
                      z:(i+k*sqrt(j))^(1/3)+(i-k*sqrt(j))^(1/3),
                      y:bfloat(z),fpprec:100,
                      x:floor(bfloat(z+0.5)),fpprec:100,
          if abs(x-y)<10^(-99) then print(i," / ",k," / ",j," / ",z)
      ]]])$

(%i2) ganzzahlige_wurzelausdruecke(20);
```

$2\ /\ 1\ /\ 5\ /\ (\sqrt{5}+2)^{1/3}+(2-\sqrt{5})^{1/3}$

$4\ /\ 4\ /\ 1\ /\ 2$

$4\ /\ 2\ /\ 4\ /\ 2$

$4\ /\ 1\ /\ 16\ /\ 2$

$5\ /\ 2\ /\ 13\ /\ (2\sqrt{13}+5)^{1/3}+(5-2\sqrt{13})^{1/3}$

$7\ /\ 5\ /\ 2\ /\ (5\sqrt{2}+7)^{1/3}+(7-5\sqrt{2})^{1/3}$

$9\ /\ 4\ /\ 5\ /\ (4\sqrt{5}+9)^{1/3}+(9-4\sqrt{5})^{1/3}$

$9\ /\ 2\ /\ 20\ /\ (4\sqrt{5}+9)^{1/3}+(9-4\sqrt{5})^{1/3}$

$10\ /\ 6\ /\ 3\ /\ (2\,3^{3/2}+10)^{1/3}+(10-2\,3^{3/2})^{1/3}$

$10\ /\ 3\ /\ 12\ /\ (2\,3^{3/2}+10)^{1/3}+(10-2\,3^{3/2})^{1/3}$

Abbildung 9: *Arbeitsblatt*

Arbeitsgruppe Algorithmische Arithmetische Geometrie an der Universität Bayreuth

Michael Stoll (Universität Bayreuth)

Die Arbeitsgruppe besteht in unterschiedlicher Zusammensetzung seit meiner Berufung an die Jacobs (damals noch „International“) University Bremen zum September 2002. Seit September 2008 ist die Arbeitsgruppe am Lehrstuhl für Computeralgebra an der Universität Bayreuth angesiedelt.

Die Forschung in der Arbeitsgruppe befasst sich mit der Arithmetik von algebraischen Varitetäten, vor allem ihren rationalen Punkten, mit dem Ziel der Entwicklung von Algorithmen zur Bestimmung der Menge der rationalen Punkte, was natürlich auch entsprechende theoretische Arbeiten erfordert. Der Schwerpunkt liegt dabei hauptsächlich auf Kurven und ihren rationalen Punkten; es werden aber auch zunehmend Flächen betrachtet. Für Kurven lässt sich die grundlegende Fragestellung elementar formulieren: Gegeben ein Polynom F in zwei Variablen mit ganzzahligen Koeffizienten, finde alle rationalen Lösungen der Gleichung $F(x, y) = 0$. Die Struktur der Lösungsmenge richtet sich nach dem Geschlecht der zugehörigen algebraischen Kurve. Da der Fall von Geschlecht $g = 0$ theoretisch und algorithmisch (jedenfalls über $\mathbb{Q}$) gut verstanden ist, sind die interessanten Fälle $g = 1$ (dann hat man es mit elliptischen Kurven und ihren homogenen Räumen zu tun) und $g \geq 2$. In diesem letzten Fall von „höherem Geschlecht“ ist nach dem berühmten Satz von Faltings die Lösungsmenge endlich und hat damit eine offensichtliche explizite Beschreibung (die es in den anderen Fällen auch gibt, die aber komplizierter ist). Die verwendeten Methoden kommen aus der algebraischen und analytischen Zahlentheorie, der algebraischen Geometrie, der (Galois-)Kohomologie und der p-adischen Analysis.

Über die Struktur der Menge der rationalen Punkte auf einer Fläche ist demgegenüber noch recht wenig bekannt. Den Kurven höheren Geschlechts entsprechen hier Flächen allgemeinen Typs, dem Satz von Faltings entspricht die Vermutung von Bombieri-Lang, dass die rationalen Punkte bis auf endlich viele auf endlich vielen Kurven von niedrigem Geschlecht liegen. Im Rahmen der DFG-Foschergruppe 790 werden spezielle solche Flächen untersucht.

Bisher wurden in der Arbeitsgruppe drei Promotionen abgeschlossen. Aktuell gehören der Arbeitsgruppe (neben mir als Lehrstuhlinhaber) folgende Mitglieder an:

- Andreas-Stephan Elsenhans als Postdoc (finanziert durch die DFG-Forschergruppe 790)
- Tzanko Matev als Doktorand (finanziert durch den DFG-Schwerpunkt 1489)
- Andreas Kühn als Doktorand

Weitere Informationen unter:
`http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/stoll/`

Besprechungen zu Büchern der Computeralgebra

Hrsg.: Kaenders, Rainer / Schmidt, Reinhard

Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen

Beispiele für die Förderung eines tieferen Mathematikverständnisses aus dem GeoGebra Institut Köln/Bonn

Springer Vieweg, 2011. VIII, 171 S. Br. ISBN 978-3-8348-1757-0, € 22,95

Der Buchtitel des von Rainer Kaenders und Reinhard Schmidt herausgegebenen Buches stellt hohe Erwartungen an das Buch. Wie auf Seite 9 erwähnt, werden in „diesem Buch [...] Wege gesucht, die [...] neuen Möglichkeiten an ausgewählten Beispielen vorzuzeigen“.

Das Buch enthält Beispiele für den möglichen Einsatz von GeoGebra im Mathematikunterricht der Sekundarstufen I und II. Dabei liegen in einzelnen Fällen sogar Beschreibungen von Unterrichtseinheiten inklusive Arbeitsblättern vor. Die Inhalte der Kapitel sind unterschiedlich nah an der Schulmathematik. Zu allen Kapiteln können die dort eingesetzten GeoGebra-Dateien von der Internetseite der GeoGebra-Instituts Köln/Bonn heruntergeladen werden, wodurch sich die einzelnen Kapitel gut durcharbeiten lassen, so dass die Inhalte sinnvoll im Unterricht eingesetzt werden können.

Auf Seite 1 des ersten Kapitels wird erwähnt, dass „das Programm zur Vertiefung des Mathematikverständnisses von Schülerinnen, Schülern oder anderen Mathematiklernenden einzusetzen“ ist. Anschließend wird anhand eines Beispiels erklärt, wie sich die mathematischen Verständnisse mit GeoGebra vertiefen lassen. Dabei wird insbesondere deutlich, dass gemeint ist, mit Hilfe von GeoGebra mehr Mathematik verstehen zu können, wobei der Einsatz von GeoGebra nicht zu umfangreich sein sollte. Denn nach einer Beobachtung auf Seite 6 handelt es sich bei „diesem Schülerergebnis [...] um alles andere als eine mathematische Gewissheit, aber es legt [...]“ eine „Vermutung nahe“. Dieses Konzept wird zu einem großen Teil umgesetzt, wie es hier an einigen Beispielen beschrieben wird.

In Kapitel 2 wird sehr praxisnah beschrieben, wie GeoGebra in Verbindung mit Konstruktionen sinnvoll verwendet werden kann. Hier ist die hohe praktische Erfahrung des Autors erkennbar, der in Abschnitt 2.3 deutlich macht, dass sich Fertigkeiten wie das Zeichnen nicht durch den Einsatz von Dynamischer Geometrie Software (DGS) ersetzen lassen. In Kapitel 4 werden mit GeoGebra Nullstellen quadratischer Funktionen aus unterschiedlichen Blickwinkeln betrachtet. Neben den schon sehr bekannten Weisen wird mit Hilfe von GeoGebra die Geometrie der quadratischen Ergänzung untersucht, was sich bei der Behandlung von Polynomen zweiten Grades und quadratischer Funktionen in der Sekundarstufe I anwenden lässt. Mit der Methode von Lill wird eine weitere Anwendungsmöglichkeit von GeoGebra in der Sekundarstufe II beschrieben, bei der neben ganzrationalen Funktionen auch die Trigonometrie ihre Anwendung findet.

Auf Polynome wird auch in Kapitel 5 eingegangen. Hier befindet sich eine interessante Kombination aus Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung, bei der Zufallspunkte in Verbindung mit quadratischen Funktionen gebracht werden. Am Ende des Kapitels (in Abschnitt 5.3) befindet sich ein Ausblick, der sich nicht zuletzt an Studentinnen und Studenten sowie Lehrerinnen und Lehrer wendet, die ihr Hintergrundwissen vertiefen möchten. Hierbei wird neben GeoGebra eine weitere Software eingesetzt, um dreidimensionale Zeichnungen machen zu können. (Mit der Beta-Version von GeoGebra 5 lassen sich auch 3-d-Graphen zeichnen. Sie ist jedoch noch nicht in einer Endfassung.)

Kapitel 6 zeigt eine Anwendung von GeoGebra in der Stochastik. Zu der hier beschriebenen Unterrichtsreihe sind in einem Anhang auch Aufgaben enthalten, in denen sich Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II mit Tests und Schätzungen beschäftigen sollen.

Verschiedene Ableitungsregeln werden in Kapitel 7 mit Hilfe von GeoGebra behandelt, wobei man sich nicht auf ganzrationale Funktionen beschränkt hat, sondern beispielsweise auch die Exponentialfunktion untersucht wird. Hier wird das Verständnis wie in Kapitel 1 und oben beschrieben durch Unterstützung durch GeoGebra erreicht.

Neben den hier beschriebenen Kapiteln gibt es weitere zu den Themen des Einsatzes von GeoGebra beim Aufstellen von Vermutungen und Lösen geometrischer Probleme, zur Eulerschen Zahl, zur Iteration und zu alternativen Bildern zu Funktionen mit Hilfe von Nomogrammen und Höhenlinien.

Insgesamt lässt sich das Buch sinnvoll von Lehre-

rinnen und Lehrern der Mathematik nutzen, um Ideen und teilweise auch Material für den Einsatz von GeoGebra im Mathematikunterricht der Sekundarstufen I und II zu haben. Es lässt sich auch zur Erweiterung eigener Kenntnisse und Anwendungen von DGS in der Lehre verwenden und kann daher auch von Studentinnen und Studenten der Mathematik des Lehramts sinnvoll genutzt werden.

Hannes Stoppel (Bochum)

Weitere Bücher können auf der Seite `http://www.fachgruppe-computeralgebra.de/Buecher` oder direkt bei Anne Frühbis-Krüger (`fruehbis-krueger@math.uni-hannover.de`) zur Besprechung angefordert werden.

Promotionen in der Computeralgebra

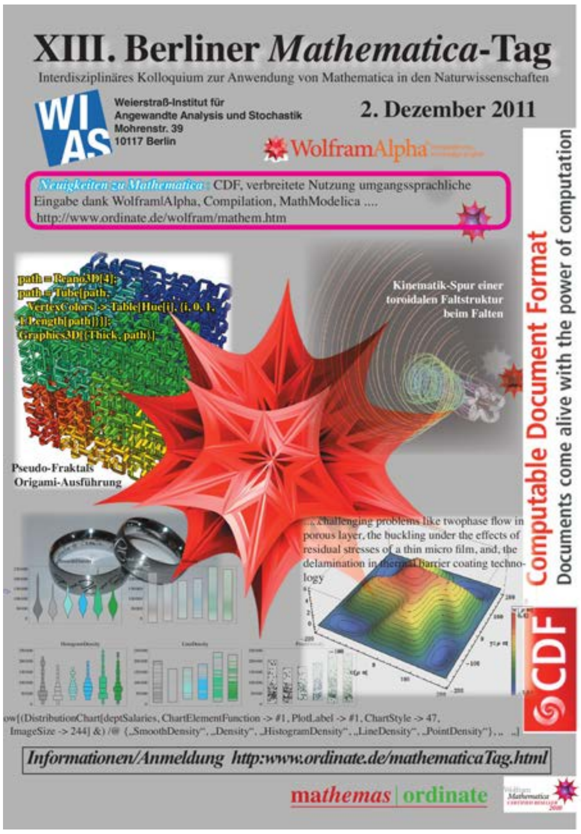
Lukas Maas: Modular Spin Characters of Symmetric Groups
Betreuer: Wolfgang Lempken (Essen), Jürgen Müller (Aachen/Essen)
Zweitgutachter: Klaus Lux (University of Arizona, USA)
Dezember 2011
`http://www.iem.uni-due.de/~maas`

Zusammenfassung: The thesis is concerned with concrete computations of modular spin characters of symmetric and alternating groups.
More precisely, we calculate all p-modular spin characters of the symmetric group S_n and the alternating group A_n for $n \in \{14, \ldots, 18\}$ and $p \in \{3, 5, 7\}$. Spin characters correspond to irreducible faithful representations of double covering groups $\tilde{S}_n$ and $\tilde{A}_n$ of S_n and A_n, respectively, and our results imply the p-modular decomposition numbers of $\tilde{S}_n$ and $\tilde{A}_n$ for the specified values of n and p. Indeed, still a key problem in the representation theory of (spin) symmetric groups is to find a general description of p-modular decomposition numbers.
Our computational methods combine various techniques of algorithmic representation theory, namely the MOC system, the MeatAxe, and condensation, with procedures designed specifically for (spin) symmetric groups, for example, the construction of p-modular character tables of certain Young subgroups of $\tilde{S}_n$ and the explicit determination of their conjugacy class fusions. We used GAP for most of our computations, and the resulting data are stored as GAP-usable character tables. These are available from the author.

1. **XIII. Berliner Mathematica Workshop**

   Berlin, 2.12.2011

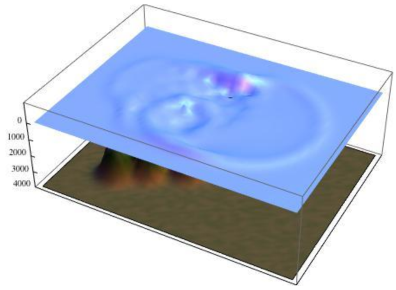
   `http://www.ordinate.de/mathematicaTag.htm`



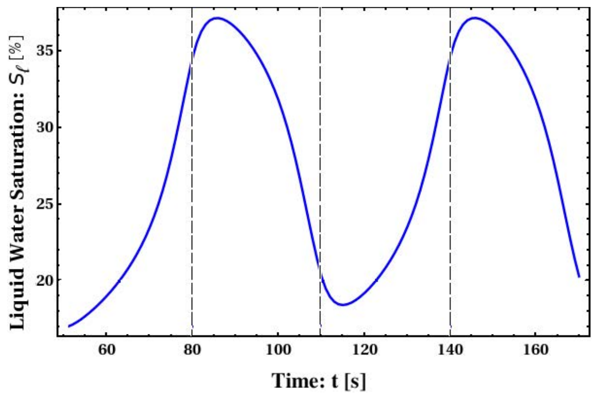
Zum 13. Mal traf man sich am 2.12.2011 auf Einladung von WIAS (`http://www.wias-berlin.de`) und mathemas ordinate, Carsten Herrmann (`http://www.ordinate.de`) in Berlin-Mitte. Aufgelockert durch den traditionell von mathemas ordinate spendierten Imbiss gab es eine Reihe interessanter Vorträge. Interessierte können Skripte der Vorträge erhalten (bitte eine Email senden an carsten@ordinate.de)

Nach der Begrüßung der ca. 40 Teilnehmer durch Carsten Herrmann ging Herr Dr. Oliver Rübenkönig von Wolfram Research auf das neue Computable Document Format (CDF) ein, das die Veröffentlichung von lebendigen Mathematica-Dokumenten in einem Browser ermöglicht. Daraufhin wurden einzelne Details wie GraphicsProgramming mit GraphicsComplex, und unter der Überschrift „Symbolics and Numerics“ die numerische Integration, Ausdrucksoptimierung, Tipps zur Compiler-Nutzung, sowie die Problemtyp-Klassifizierung für NDSolve besprochen. Hier gab es ein interessantes Beispiel zur Tsunami–Simulation unter Berücksichtigung der Meeresbodentopographie.

Dr. Yasser Safa, vom Institute of Computational Physics, Zurich University of Applied Sciences, berichtete anschliessend über Mathematica-Implementierungen neuer Simulationscodes für anspruchsvolle industrielle Anwendungen (wie „two phase flow in porous layer“, „the buckling under the effects of residual stresses of a thin micro film“ und „the delamination in thermal barrier coating technology“.) Im Hauptteil zeigte Dr. Safa die Implementierung einer neuen Methode zum Studium des Transportproblems unter speziellen geometrischen Nebenbedingungen.



Das nichtlineare Erhaltungssystem wird normalerweise mit Linearisierungsmethoden (wie NewtonRaphson) gelöst, die jedoch nicht immer effizient sind bei schlecht konditionierten Problemen. Bei SOFC-Brennstoffzellenanwendungen ermöglichen numerische ADI-Methoden (Alternating Direction Implicit) die Vorhersage lokaler Gradienten von chemischen Größen und elektrischer Ladungen mit geringem numerischen Aufwand und unbedingter numerischer Stabilität. Dies ist besonders wichtig in der Umgebung eines „current collector rib“ und unter extremen Betriebsbedingungen, z. B. wenn der Brennstoff zur Neige geht.

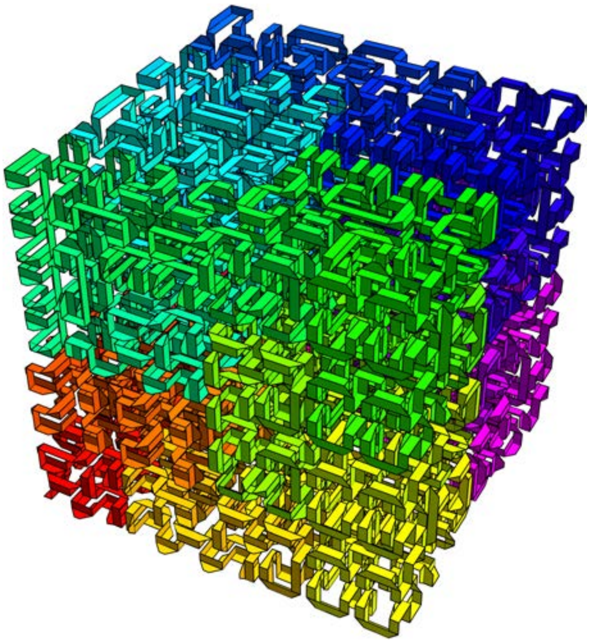


Zeitliche Entwicklung PEM Brennstoffzelle

Herr Dipl.-Ing. Yves Klett vom IFB Institut für Flugzeugbau der Universität Stuttgart bot zwei Präsentationen. Die Präsentation „Mathematica für Ingenieure (Fallbeispiele)“ kann man auch auf youtube anschauen und sich von der lebendigen Vortragsart von Herrn Klett überzeugen: `https://www.youtube.com/watch?v=Cb0CH60AIfM&list=PLCD1C4A44DFA4D7C6&index=9&feature=plpp_video`

Ingenieure haben in der Regel einen praktischen Ansatz: Sie wollen eine praktische Lösung eines Problems (und das sei einer der Vorteile von Mathematica: man kann sehr schnell zu praktikablen Lösungen gelangen). Aus der Sicht eines Ingenieurs in F&E zeigte Herr Klett ein paar Beispiele seiner praktischen Arbeit mit Mathematica: DXF-Filter, Test-Datenanalyse, Faltungen (im Origami-Sinn), Oberflächen-Rekonstruktion, Honigwaben-Analyse, Visualisierung mit Scripts (sehr interessant für enzyklopädische Übersichten), mit Mathematica visualisierte Faltungen. Im zweiten Vortrag „Computational Origami (mit Mathematica)“ berichtete Herr Klett, wie er mit Mathematica die Flugzeugbauingenieurtechnische Aufgabe der Leichtkonstruktion behan-

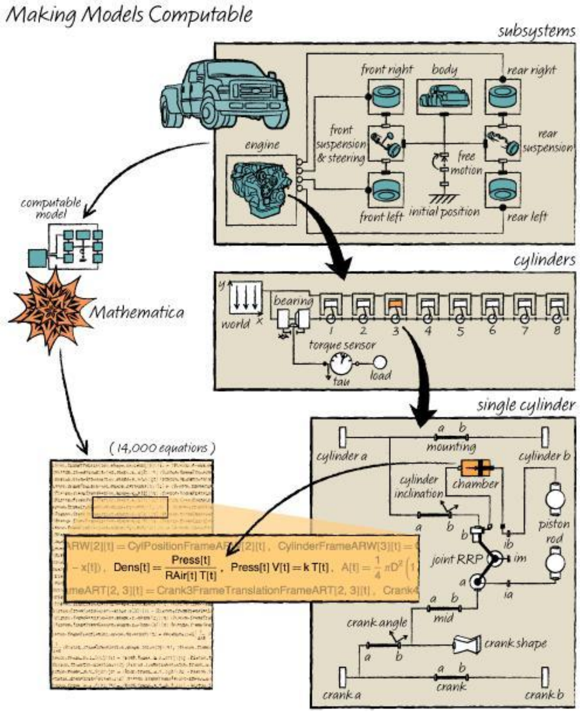
delt. Dazu gehört das „Sandwich Principle“. Mit Papier lassen sich hochperformante Strukturen erstellen, wie zum Beispiel die bekannten hexagonalen Honigwaben oder die sogenannten MIO (Modular Isometric Origami) Faltkerb(„foldcores“)-Anleitungen, wobei die Faltung in einem Schritt aus einem Stück Papier (ohne Strecken, Schneiden oder Kleben) erfolgt. Herr Klett demonstrierte, wie man mit Mathematica Origami-Prinzipien sehr nützlich zur Konstruktion leichter Material-Kerne mit mehrfunktionalen Eigenschaften einsetzen kann. Für 1DOF („1 Degree Of Freedom“) Faltstrukturen ist die Entwicklung von Software erforderlich, die virtuelle Einheitszellen konstruiert und deren Kinematik herleitet und simuliert. Mathematica eigne sich sehr gut dazu, da algebraische und numerische Methoden kombinierbar sind und die Ergebnisse in Echtzeit visualisiert und manipuliert werden können.

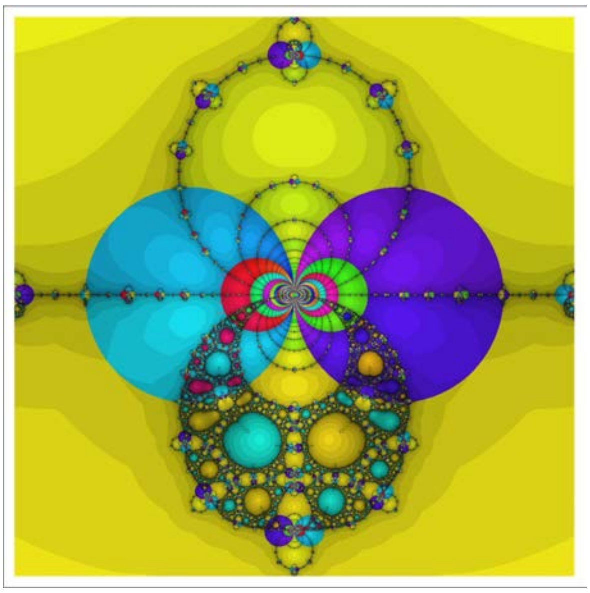


Im Anschluss hieran behandelte Carsten Herrmann aus Kiel überblicksartig das Thema Simulation in Mathematica. Der Anlaß dazu: Wolfram Research hat vor kurzem die schwedische Fa. MathCore übernommen, deren Hauptprodukt MathModelica war (und ist). Stephen Wolfram hatte im Frühjahr 2011 einen blog dazu verfasst: `http://blog.wolfram.com/2011/03/30/launching-a-new-era-in-large-scale-systems-modeling/` der in einer wichtigen Kernausssage „. . . we' re finally ready to make modeling an integrated part of Mathematica.“ kulminiert. Wolfram Research hat sich, so liest man, das hochgesteckte Ziel gesetzt, Wolfram alpha (inkl. Spracherkennung), Mathematica, MathModelica und CDF für ein futuristisch anmutendes Entwicklungsprojekt „large scale systems modeling“ zu kombinieren. Das mathematische Kernthema sind hierbei differential-algebraische Gleichungen. Man darf also gespannt sein, was die nächste Mathematica-Version bringen wird.

Im ersten Teil des Vortrags hatte Carsten Herrmann seine Erfahrungen aus eigenen recht praxisnahen Simulationsprojekten geschildert und versuchsweise Mathematica-Manipulates vernetzt.

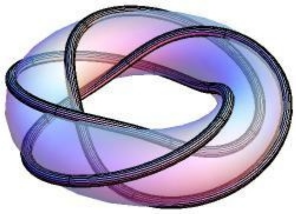
Dr. Axel Kilian von der Hochschule Merseburg sprach dann über „Newton-Fraktale mit Mathematica“. Newton-Fraktale entstehen, indem man einen Teil der Gaußschen Zahlenebene rastert und die Punkte als Startpunkte eines Newton-Verfahrens durchläuft. Die daraus gewonnenen Informationen, nämlich welche Nullstelle gefunden wurde und wie viele Schritte dafür benötigt wurden, werden mit einem geeigneten Farbschema als Rastergrafik visualisiert. Besitzt die untersuchte Funktion mehr als zwei Nullstellen, tritt ein erstaunliches Phänomen auf: die Grenze zwischen den Bereichen, in denen das Verfahren entweder zur einen oder zur anderen Nullstelle strebt, ist keine einfache Linie, sondern ein Fraktal. Nach einer kurzen Einführung in die fraktale Geometrie wurde anhand von auserlesenen Beispielen demonstriert, dass jede Funktion, quasi als Signatur, ihr ganz spezielles Newton-Fraktal besitzt. Die Tools zur Erzeugung und Visualisierung wurden vollständig in Mathematica implementiert.





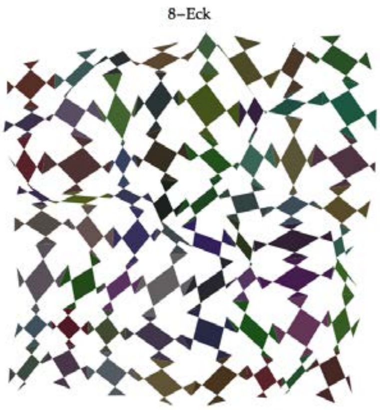
Patrick Scheibe, vom Translationszentrum für regenerative Medizin, Universität Leipzig schilderte mit „Ring-Design mit Mathematica“ seinen Mathematica-Einsatz bei seiner Heirat: Heutzutage ist vieles möglich; unter anderem auch, mit einem Laser vollkommen frei wählbare Grafiken in Metalle einzubrennen. Warum sich also nicht mit Mathematica ein völlig einzigartiges Muster für die Eheringe erstellen? Und wenn man gleich dabei ist, warum nicht gleich den ganzen Ring modellieren, um eine Vorstellung vom Endprodukt

zu bekommen? Dabei wurden u.a. Codierung und Texturierung verwendet.



Prof. Dr. Rolf Sulanke (Humboldt-Universität Berlin) sprach über Möbius Geometrie mit Mathematica. Möbius Geometrie wurde als die konforme Geometrie der dreidimensionalen Sphäre behandelt. Um sie mit Mathematica zu bearbeiten, sind Erweiterungen des begrifflichen Apparats nötig, die interessante Anwendungen auch in anderen Gebieten ermöglichen: 3D-Kreise und Sphären in der euklidischen Geometrie, pseudo-euklidische lineare Algebra mit einem Orthogonalisierungsverfahren, und die Korrespondenz von Objekten der dreidimensionalen Möbius Geometrie zu Objekten des pseudo-euklidischen fünfdimensionalen Vektorraums. Der Vortrag stellte nur einige Beispiele für die Anwendung dieser Erweiterungen in der Möbius Geometrie vor. Das gesamte Material einschließlich der Mathematica Notebooks und Packages kann man von der Homepage `http://www-irm.mathematik.hu-berlin.de/~sulanke/` herunterladen.

Abschließend gab es von Univ.Prof. Dr. em. Götz Uebe, (HSU Hamburg) einen unkonventionellen, anschaulichen und erfrischenden Beitrag zum Thema „Kunst, Geometrie und Zufallszahlen“. Herrn Uebe gelang es mit Mathematica unter Nutzung von Zufallszahlen und Grundobjekten wie Linie, Quadrat etc., eine ganze Reihe nicht-gegenständlicher „Kunstwerke“ zu erstellen. Diese ähnelten stark Werken von bekannten Künstlern wie Josef Albers, Blinky Palermo, George Korsmit, Piet Mondrian, Georg Nees, Bridget Riley, Victor Vasarely, Damien Hirst, Herman de Vries und vielen anderen. Kunst und Statistik haben also einiges gemein.



Mit der nachmittäglichen Kaffeerunde klang der Mathematica-Tag gegen 17 Uhr aus. Der nächste ist bereits für das nächste Jahr geplant, und Sie können sich anmelden auf `http://www.ordinate.de/mathematicaTag.htm`.

Carsten Herrmann

Hinweise auf Konferenzen

1. **Polynomial Computer Algebra ’2012**

   St.Petersburg, Russland, 23. – 28.04.2012

   `http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2012/pca/`

   The Conference is devoted to modern polynomial algorithms in Computer Algebra which are gaining importance in various applications of science as well as in fundamental researches.

   Main subjects: Groebner bases, combinatorics of monomial orderings, differential bases, involutive algorithms, computational algebraic geometry, D-modules, polynomial differential operators, parallelization of algorithms, algorithms of tropical mathematics, quantum computing, cryptography, matrix algorithms,complexity of algorithms and others.

2. **Tagung der Fachgruppe Computeralgebra**

   Kassel, 10. – 12.05.2012

   `http://www.fachgruppe-computeralgebra.de/TagungKassel`

   Diese Tagung setzt die Reihe der Tagungen der Fachgruppe (Kassel 2003, 2005, 2009, Kaiserslautern 2007) fort. Eine ausführliche Ankündigung finden Sie auf Seite 7.

3. **Symbolic Computation and Applications (SCA) 2012**

   Aachen, 17.05.2012 – 20.05.2012

   `http://www.computeralgebra.de/SCA2012/`

   Following the success of the conference “Symbolic Computation and its Applications” (Maribor, Slovenia, June 30 to July 2, 2010) we are organizing in Aachen, Germany the second conference “Symbolic Computation and its Applications”, May 17 to May 20, 2012.

   The aim of this conference is to bring together researchers from different corners of symbolic computation. The interplay between various concepts, methods, algorithms and software packages proves to be enriching all participating sides. New developments in the theory, algorithms, software as well as new solutions to important applied problems are subjects of the broad discussion. The topics include, but are not limited to

   - Symbolic computation in differential, difference and mixed equations, both linear and nonlinear
   - Algebraic analysis, D-modules and mixed discrete-continuous linear functional systems
   - Dynamical systems and nonlinear ODEs
   - Computational commutative algebra and algebraic geometry

- Cryptanalysis
- Symbolic-numerical computations

Organizing committee: Viktor Levandovskyy, Eva Zerz (RWTH Aachen), Valery Romanovski (CAMTP, Maribor, Slovenia).

4. SEA 2012 – 11th International Symposium on Experimental Algorithms

Bordeaux, France, 7. – 9.06.2012

`http://sea2012.labri.fr/`

SEA, previously known as WEA (Workshop on Experimental Algorithms), is an international forum for researchers in the area of design, analysis, and experimental evaluation and engineering of algorithms, as well as in various aspects of computational optimization and its applications. The preceding symposia were held in Riga, Monte Verita, Rio de Janeiro, Santorini, Menorca Island, Rome, Cape Cod, Dortmund, Ischia Island, and Crete.

The main theme of the symposium is the role of experimentation and of algorithm engineering techniques in the design and evaluation of algorithms and data structures. Submissions should present significant contributions supported by experimental evaluation, methodological issues in the design and interpretation of experiments, the use of (meta-)heuristics, or application-driven case studies that deepen the understanding of a problem's complexity.

5. ACA 2012 – 18th International Conference on Applications of Computer Algebra

Sofia, Bulgaria, 25. – 28.06.2012

`http://www.math.bas.bg/ACA2012/`

The ACA series of conferences is devoted to promoting the growing applications of computer algebra in science, engineering and education. They provide a forum for researchers, developers and users of computer algebra algorithms and systems, and for anyone interested in computer algebra applications.

6. ANTS -X – Tenth Algorithmic Number Theory Symposium

University of California, San Diego, USA, 9. – 13.07.2012

`http://math.ucsd.edu/~kedlaya/ants10/`

As at previous ANTS conferences, the program will include several invited addresses, a greater number of contributed lectures, a poster session, a rump session, and a conference banquet. There will be a proceedings volume published by Springer-Verlag.

7. CICM 2012 – Conferences on Intelligent Computer Mathematics

Jacobs University, Bremen, 9. – 14.07.2012

`http://www.informatik.uni-bremen.de/cicm2012/cicm.php`

As computers and communications technology advance, greater opportunities arise for intelligent mathematical computation. While computer algebra, automated deduction, mathematical publishing and novel user interfaces individually have long and successful histories, we are now seeing increasing opportunities for synergy among these areas.

8. TIME 2012 – Technology and its Integration in Mathematics Education

Tartu, Estonia, 10. – 14.07.2012

`http://time2012.ut.ee/`

In 1992 ACDCA (the Austrian Center for Didactics of Computer Algebra) started a conference series which has become a driving force in bringing technology, in particular computer algebra systems (CAS), into the classroom.

The conference series comprises two strands: the ACDCA Summer Academies, which are more oriented towards didactical questions connected with the use of technology for teaching and learning and the conferences for CAS in Education and Research, which are geared towards exploring the use of CAS software and symbolic calculators in education and towards using these tools in programming and research.

TIME 2012 is a 20-Years' Celebration of this Conference Series.

9. SCC 2012 – Third international conference on Symbolic Computation and Cryptography

Castro Urdiales, Spain, 11. – 13.07.2012

`http://scc2012.unican.es`

The third international conference on Symbolic Computation and Cryptography (SCC 2012) will take place at International Centre for Mathematical meetings (CIEM), Castro Urdiales, on 11-13 July 2012. The SCC 2012 conference is colocated with third Workshop on Mathematical Cryptology (WMC 2012), an event also organized by research group Algorithmic Mathematics And Cryptography (AMAC), which will be held on 9-11 July 2012.

SCC 2012 is the third edition of a new series of conferences, which have been established in response to the growing interest in applying and developing methods, techniques, and software tools of symbolic computation for cryptography. The first conference (SCC 2008) was held in Beijing, China, in April 2008 and the second one (SCC 2010) was held in Egham, UK, in June 2010.

SCC 2012 aims at providing an interactive forum for researchers to present recent results, exchange ideas, and learn and discuss the latest developments and emerging problems in the area of symbolic computation and cryptography. Typical areas of interest include: design, modeling, and analysis of cryptographic systems and protocols for which symbolic computation may be used or needed; design, implementation, and analysis of algorithms and software tools of symbolic computation that may have potential applications in cryptography.

10. WAIFI 2012 – International Workshop on the Arithmetic of Finite Fields

Bochum, 16. – 19.07.2012

`http://waifi.org/`

This workshop is a forum of mathematicians, computer scientists, engineers and physicists performing research on finite field arithmetic, interested in communicating the advances in the theory, applications, and implementations of finite fields. The workshop will help to bridge the gap between the mathematical theory of finite fields and their hardware/software implementations and technical applications.

11. **ISSAC 2012 – International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation**

Grenoble, France, 22. – 25.07.2012

http://www.issac-conference.org/2012

The International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC) is the premier conference for research in symbolic computation and computer algebra. ISSAC 2012 is the 37th meeting in the series, started in 1966 and held annually since 1981, in North America, Europe and Asia. The conference presents a range of invited speakers, tutorials, poster sessions, software demonstrations and vendor exhibits with a centerpiece of contributed research papers.

12. **CASC 2012 – 14th International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing**

Maribor, Slovenia, 3. – 6.09.2012

http://www14.in.tum.de/CASC2012/

The methods of Scientific Computing play an important role in the natural sciences and engineering. Significance and impact of computer algebra methods and computer algebra systems for scientific computing has increased considerably over the last decade. Nowadays, computer algebra systems such as CoCoA, Macaulay, Magma, Maple, Mathematica, Maxima, Reduce, Singular and others enable their users to exploit their powerful facilities in symbolic manipulation, numerical computation and visualization. The ongoing development of computer algebra systems, including their integration and adaptation to modern software environments, puts them to the forefront in scientific computing and enables the practical solution of many complex applied problems in the domains of natural sciences and engineering.

The topics addressed in the workshop cover all the basic areas of scientific computing as they benefit from the application of computer algebra methods and software.

The 14th International Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC'2012) will be held in Maribor, Slovenia, from September 3 to 6, 2012. The Local Arrangements Chair is Valery Romanovski.

13. **Informatik 2012 – Jahrestagung der GI**

TU Braunschweig, 16. – 21.09.2012

http://www.informatik2012.de

Auf der ersten gemeinsamen Tagung von GI und GMDS vom 16.09.2012 bis zum 21.09.2012 werden unter dem Leitthema "Was bewegt uns in der Zukunft? Neue Lebenswelten in der Informationsgesellschaft" Workshops, wissenschaftliche Sitzungen, Plenarveranstaltungen, Tutorien und studentische Veranstaltungen angeboten. Führende Personen aus Wissenschaft, Politik und Praxis geben einen Überblick über die aktuellsten Entwicklungen rund um das Leitthema der Tagung sowie über weitere aktuelle Forschungsergebnisse aus den durch die GI und die GMDS vertretenen Fachgebieten.

Tagungsleitung: Prof. Dr. Lars Wolf

14. **Jahrestagung der DMV**

Universität des Saarlandes, 17. – 20.09.2012

http://www.math.uni-sb.de/dmv/

Im Jahr 2012 findet die Jahrestagung der DMV in Saarbrücken statt. Zu den Hauptvortragenden gehören Wolfram Decker (TU Kaiserslautern), Ilia Itenberg (Université Pierre et Marie Curie, Paris), Chandrashekhar Khare (UCLA), Mila Nikolova (ENS Cachan), Dimitri Shlyakhtenko (UCLA), Martin Schweizer (ETH Zürich), Endre Süli (University of Oxford), Nina Uraltseva (St. Petersburg State University). Die Emmy-Noether-Vorlesung wird von Anna Wienhard (Princeton University) gehalten.

Aufnahmeantrag für Mitgliedschaft in der Fachgruppe Computeralgebra

(Im folgenden jeweils Zutreffendes bitte im entsprechenden Feld [ ] ankreuzen bzw. ____________ ausfüllen.)

Titel/Name: ______________________________ Vorname: ______________

Privatadresse
Straße/Postfach: ______________________________

PLZ/Ort: ______________________________ Telefon: ______________

E-mail: ______________________________ Telefax: ______________

Dienstanschrift
Firma/Institution: ______________________________

Straße/Postfach: ______________________________

PLZ/Ort: ______________________________ Telefon: ______________

E-mail: ______________________________ Telefax: ______________

Gewünschte Postanschrift: [ ] Privatadresse [ ] Dienstanschrift

1. Hiermit beantrage ich zum 1. Januar 201__ die Aufnahme als Mitglied in die Fachgruppe

   Computeralgebra (CA) (bei der GI: 0.2.1).

2. Der Jahresbeitrag beträgt € 7,50 bzw. € 9,00. Ich ordne mich folgender Beitragsklasse zu:

   [ ] **€ 7,50** für Mitglieder einer der drei Trägergesellschaften
   [ ] GI Mitgliedsnummer: ______________
   [ ] DMV Mitgliedsnummer: ______________
   [ ] GAMM Mitgliedsnummer: ______________
   Der Beitrag zur Fachgruppe Computeralgebra wird mit der Beitragsrechnung der Trägergesellschaft in Rechnung gestellt. (Bei Mitgliedschaft bei mehreren Trägergesellschaften wird dies von derjenigen durchgeführt, zu der Sie diesen Antrag schicken.) [ ] Ich habe dafür bereits eine Einzugsvollmacht erteilt. Diese wird hiermit für den Beitrag für die Fachgruppe Computeralgebra erweitert.

   [ ] **€ 7,50**. Ich bin aber noch nicht Mitglied einer der drei Trägergesellschaften. Deshalb beantrage ich gleichzeitig die Mitgliedschaft in der

   [ ] GI [ ] DMV [ ] GAMM.

   und bitte um Übersendung der entsprechenden Unterlagen.

   [ ] **€ 9,00** für Nichtmitglieder der drei Trägergesellschaften. [ ] Gleichzeitig bitte ich um Zusendung von Informationen über die Mitgliedschaft in folgenden Gesellschaften:

   [ ] GI [ ] DMV [ ] GAMM.

3. Die in dieses Formular eingetragenen Angaben werden elektronisch gespeichert. Ich bin damit einverstanden, dass meine Postanschrift durch die Trägergesellschaften oder durch Dritte nach Weitergabe durch eine Trägergesellschaft wie folgt genutzt werden kann (ist nichts angekreuzt, so wird c. angenommen).

   [ ] a. Zusendungen aller Art mit Bezug zur Informatik, Mathematik bzw. Mechanik.
   [ ] b. Zusendungen durch wiss. Institutionen mit Bezug zur Informatik, Mathematik bzw. Mechanik.
   [ ] c. Nur Zusendungen interner Art von GI, DMV bzw. GAMM.

Ort, Datum: ______________ Unterschrift: ______________________________

Bitte senden Sie dieses Formular an:

Fachgruppe Computeralgebra
Prof. Dr. Wolfram Koepf
Institut für Mathematik
Universität Kassel
Heinrich-Plett-Str. 40
34132 Kassel
0561-804-4207, -4646 (Fax)
koepf@mathematik.uni-kassel.de

Fachgruppenleitung Computeralgebra 2011-2014

Sprecherin:
Prof. Dr. Eva Zerz
Lehrstuhl D für Mathematik
RWTH Aachen
Templergraben 64, 52062 Aachen
0241-80-94544, -92108 (Fax)
eva.zerz@math.rwth-aachen.de
http://www.math.rwth-aachen.de/~Eva.Zerz/

Fachreferentin Publikationen und Promotionen:
Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger
Institut für Algebraische Geometrie
Welfengarten 1, 30167 Hannover
0511-762-3592
fruehbis-krueger@math.uni-hannover.de
http://www.iag.uni-hannover.de/~anne

Fachreferent Physik:
Dr. Thomas Hahn
Max-Planck-Institut für Physik
Föhringer Ring 6, 80805 München
089-32354-300, -304 (Fax)
hahn@feynarts.de
http://wwwth.mppmu.mpg.de/members/hahn

Fachexperte Industrie:
Prof. Dr. Michael Hofmeister
Siemens AG
Corporate Technology
Modeling, Simulation, Optimization
Otto-Hahn-Ring 6, 81739 München
089-636-49476, -42284 (Fax)
michael.hofmeister@siemens.com
http://www.siemens.com

Fachreferentin Computational Engineering, Vertreterin der GAMM:
Dr.-Ing. Sandra Klinge
Lehrstuhl für Mechanik - Materialtheorie
Ruhr-Universität Bochum
Universitätsstr. 150, 44780 Bochum
0234-32-26552, -14154 (Fax)
sandra.klinge@rub.de
www.am.bi.ruhr-uni-bochum.de/Mitarbeiter/Ilic

Vertreter der DMV:
Prof. Dr. Wolfram Koepf
Institut für Mathematik
Universität Kassel
Heinrich-Plett-Str. 40, 34132 Kassel
0561-804-4207, -4646 (Fax)
koepf@mathematik.uni-kassel.de
http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf

Fachreferent CA an der Hochschule:
Prof. Dr. Gunter Malle
Fachbereich Mathematik
Technische Universität Kaiserslautern
Gottlieb-Daimler-Straße, 67663 Kaiserslautern
0631-205-2264, -3989 (Fax)
malle@mathematik.uni-kl.de
http://www.mathematik.uni-kl.de/~malle

Fachexperte Schule:
OStR Jan Hendrik Müller
Rivius-Gymnasium der Stadt Attendorn
Westwall 48, 57439 Attendorn
02722-5953 (Sekretariat)
jan.mueller@math.uni-dortmund.de
www.mathebeimueller.de

Redakteur Rundbrief:
Dr. Michael Cuntz
Fachbereich Mathematik
Technische Universität Kaiserslautern
Postfach 3049, 67653 Kaiserslautern
0631-205-2515
cuntz@mathematik.uni-kl.de
http://www.mathematik.uni-kl.de/~cuntz

Stellvertretender Sprecher:
Prof. Dr. Florian Heß
Carl-von Ossietzky Universität Oldenburg
Institut für Mathematik, 26111 Oldenburg
0441-798-2906, -3004 (Fax)
florian.hess@uni-oldenburg.de
http://www.staff.uni-oldenburg.de/florian.hess

Fachexperte Lehre und Didaktik:
Prof. Dr. Gilbert Greefrath
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik
Fliednerstr. 21, 48149 Münster
0251-8339396
greefrath@uni-muenster.de
http://www.greefrath.de

Fachreferentin Fachhochschulen:
Prof. Dr. Elkedagmar Heinrich
Fachbereich Informatik, Hochschule für Technik,
Wirtschaft und Gestaltung Konstanz
Brauneggerstr. 55, 78462 Konstanz
07531-206-343, -559 (Fax)
heinrich@htwg-konstanz.de
http://www.in.fh-konstanz.de/inhalte/de/KONTAKT/
persseiten_nbc/heinrich.html

Fachreferent CA-Systeme und -Bibliotheken:
Prof. Dr. Gregor Kemper
Zentrum Mathematik – M11
Technische Universität München
Boltzmannstr. 3, 85748 Garching
089-289-17454, -17457 (Fax)
kemper@ma.tum.de
http://www-m11.ma.tum.de/~kemper

Fachreferent Schwerpunktprogramm 1489:
Prof. Dr. Jürgen Klüners
Mathematisches Institut der Universität Paderborn
Warburger Str. 100, 33098 Paderborn
05251-60-2646, -3516 (Fax)
klueners@math.uni-paderborn.de
http://www2.math.uni-paderborn.de/people/
juergen-klueners.html

Fachreferent Themen und Anwendungen:
Prof. Dr. Martin Kreuzer
Fakultät für Informatik und Mathematik
Universität Passau
Innstr. 33, 94030 Passau
0851-509-3120, -3122 (Fax)
martin.kreuzer@uni-passau.de
http://www.fim.uni-passau.de/~kreuzer

Vertreter der GI:
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Fakultät für Informatik
Technische Universität München
Boltzmannstraße 3, 85748 Garching
089-289-17706, -17707 (Fax)
mayr@in.tum.de
http://www.in.tum.de/~mayr/

Koordinator Internetauftritt:
Prof. Dr. Hans-Gert Gräbe
Institut für Informatik
Universität Leipzig
Postfach 10 09 20, 04009 Leipzig
0341-97-32248
graebe@informatik.uni-leipzig.de
http://www.informatik.uni-leipzig.de/~graebe

Redakteurin Rundbrief:
Dr. Gohar Kyureghyan
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg
Institut für Algebra und Geometrie
Universitätsplatz 2, 39106 Magdeburg
0391-67-11650, -11213 (Fax)
gohar.kyureghyan@ovgu.de
http://fma2.math.uni-magdeburg.de/~gkyureg

Werbeseite Maplesoft