Steffen Hölldobler et al. (Hrsg.): Ausgezeichnete Informatikdissertationen 2019,
Lecture Notes in Informatics (LNI), Gesellschaft für Informatik, Bonn 2020 209

# Neue Graphen-Algorithmen mittels polyedrischer Methoden[1]

Jakub Tarnawski[2]

**Abstract:** In dieser Arbeit werden neue Algorithmen für zwei grundlegende Graphenprobleme vorgestellt. Mit Hilfe von linearen Programmen – darunter auch Programme exponentieller Größe – werden Struktureigenschaften ermittelt die vom Algorithmus verwendet werden. Etwas überraschend können ähnliche polyedrische Methoden in beiden Graphenproblemen angewendet werden. Der erste Teil der Dissertation widmet sich dem *asymmetrischen Handlungsreisendenproblem* (Asymmetric Traveling Salesman Problem – ATSP), einem Benchmark-Problem der kombinatorischen Optimierung. Bei diesem Problem geht es darum, die kürzeste Tour für einen gerichteten und kantengewichteten Graphen zu finden, die alle Knoten besucht. Seit langem galt es als offen, ob es einen Approximationsalgorithmus für dieses Problem mit einer konstanten Güte gibt. Ein Ergebnis dieser Arbeit ist ein solcher Algorithmus. Der zweite Teil der Dissertation widmet sich dem *perfekten Matching-Problem*. Zudem wurde in den Achtzigerjahren gezeigt, dass es effiziente parallele Algorithmen für das Matching-Problem gibt, sofern die Verwendung von Zufälligkeit zulässig ist. Allerdings ist es noch offen ob das Matching-Problem in der Komplexitätsklasse $\mathsf{NC}$ liegt, also ob Zufälligkeit notwending ist. Diese Arbeit zeigt, dass das Matching-Problem in $\mathsf{quasi\text{-}NC}$ liegt.

## 1 Einführung

Die Entwicklung und Analyse von Algorithmen ist seit jeher eine zentrale Aufgabe der Informatik. Mit steigenden Datenvolumina wird die rechnerische Effizienz immer wichtiger. Gleichzeitig werden Entscheidungen von immer größerer Tragweite zunehmend von Algorithmen oder anhand der Ergebnisse von Algorithmen getroffen. Unsere Algorithmen müssen daher Lösungen von hoher Qualität liefern. Außerdem benötigen wir ein gutes Verständnis dafür, was diese Algorithmen leisten und wo ihre Grenzen liegen. Eine strikte theoretische Untersuchung effizienten Rechnens wird daher wichtiger als je zuvor. In der vorliegenden Dissertation legen wir den Schwerpunkt auf die Entwicklung von Algorithmen mit beweisbaren Worst-Case-Gütegarantien.

Die Aufgaben, die sich mit Hilfe eines Computers lösen lassen, sind durch die rechnerischen Ressourcen beschränkt, die zur Verfügung stehen. Davon ist Zeit die wichtigste. In der klassischen Sicht auf rechnerische Komplexität gilt ein Algorithmus dann als effizient, wenn sich die Anzahl der Rechenoperationen, die bei einer beliebigen Eingabe durchgeführt werden, durch eine Polynomialfunktion der Größe der Eingabe eingrenzen lässt. Die grundlegende Komplexitätsklasse P umfasst Probleme mit zugehörigen Algorithmen, die im obigen Sinne effizient sind (wir nennen sie „polynomiale Algorithmen“) und immer die richtige Lösung liefern. Solche Probleme gelten als effizient lösbar. Ein Beispiel hierfür ist das *Problem des kürzesten Wegs*: Gegeben seien ein kantengewichteter Graph,

[1] Englischer Titel der Dissertation: ”New Graph Algorithms via Polyhedral Techniques“

[2] Microsoft Research, Zürich, Schweiz. jakub.tarnawski@microsoft.com

d. h. ein Graph mit Gewichten (Distanzen) entlang seiner Kanten, sowie zwei ausgezeichnete Knoten. Was ist die Länge des kürzesten Wegs, der die beiden Knoten miteinander verbindet?

Bedauerlicherweise geht man heute davon aus, dass eine große und relevante Klasse grundlegender Probleme nicht effizient lösbar ist. Diese Probleme werden *NP-schwere Probleme* genannt. Ein bekanntes Beispiel ist das *Problem des Handlungsreisenden (Traveling Salesman Problem – TSP)*: Gegeben sei ein kantengewichteter Graph. Was ist die Länge des kürzesten Rundwegs, der über alle Knoten des Graphen führt?

Es sind zahlreiche Ansätze zum Umgang mit NP-schweren Problemen entwickelt worden. Zum Beispiel kann man die Anforderung aufgeben, dass der Algorithmus den kürzestmöglichen Rundweg liefern muss, und sich stattdessen mit einem Rundweg zufriedengeben, der nicht viel länger ist als der kürzestmögliche. Dann hätten wir aber gern eine beweisbare Garantie dafür, wie lang dieser Weg höchstens werden kann. Das bringt uns zu dem Konzept der *Approximationsalgorithmen*: Für ein Minimierungs-Problem, wie etwa das TSP, wird ein Algorithmus als *Approximationsalgorithmus der Güte* $\alpha$ bezeichnet, wenn er in Polynomialzeit abläuft und die Länge des zurückgegebenen Rundwegs immer höchstens um einen Faktor $\alpha$ länger als der optimale (kürzeste) Rundweg ist. Die Größe $\alpha$ wird als *Approximationsverhältnis* (oder *Approximationsfaktor*) bezeichnet. Für ein gegebenes Optimierungsproblem lautet dann die Frage: Was ist das bestmögliche Approximationsverhältnis?

Eine besondere Schwierigkeit bei der Analyse von Approximationsalgorithmen besteht darin, für einen gegebenen Algorithmus zu beweisen, dass jede von ihm gelieferte Lösung mit Kosten behaftet ist, die nicht mehr als um einen Faktor $\alpha$ über den optimalen Kosten liegen – obwohl die letzteren unbekannt sind und sich wahrscheinlich weder effizient berechnen lassen, noch einfache Überlegungen dazu möglich sind. Aus diesem Grund suchen wir nach starken unteren Schranken für die Kosten einer beliebigen Lösung. Diese unteren Schranken können dann anstelle der optimalen Werte benutzt werden. Dies lässt sich anhand des Problems des Handlungsreisenden auf ungerichteten Graphen (das so genannte *symmetrische TSP*) mit einem Approximationsalgorithmus veranschaulichen, bei dem der minimale Spannbaum (MST) des Graphen berechnet und jede seiner Kanten doppelt genommen wird. Man sieht leicht, dass dies einen Rundweg ergibt. Zudem enthält der optimale Rundweg, da er den gesamten Graphen erfasst, ebenfalls einen Spannbaum, der mindestens so kostspielig ist wie der MST. Somit sind die Kosten des MST eine untere Grenze für die Kosten des optimalen Rundwegs. Da bei dem gewählten Approximationsalgorithmus die doppelten Kosten des MST anfallen, ist er *a fortiori* eine Näherung der Güte 2 für das symmetrische TSP.

Ein kanonischer Weg, belastbare untere Schranken zu erhalten, ist die *LP-Relaxation*. Dabei ermittelt man zunächst eine äquivalente Formulierung des Problems als ganzzahliges Programm. Das lineare Programm (LP) erhält man sodann durch Relaxieren, das heißt Weglassen, der Ganzzahligkeitsbedingungen für die Variablen (daher der Name). Entscheidend dabei ist, dass das LP in Polynomialzeit gelöst werden kann. Die LP-Lösung kann als Orientierung für den Algorithmus bei der Entscheidungsfindung dienen, und ihr Wert stellt eine untere Schranke dar, anhand derer sich die Güte der Näherung analysieren lässt. Die Qualität (Festigkeit bzw. Tightness) dieser unteren Schranke wird durch eine Größe namens *Integritätslücke* angegeben.

Der Nutzen von Methoden zur linearen Programmierung liegt jedoch nicht allein bei Approximationsalgorithmen für NP-schwere Probleme. Vielmehr kann man, wenn man das Problem aus polyedrischer Perspektive betrachtet, beim Entwickeln eines Algorithmus aus einem reichhaltigen Fundus an Werkzeugen und Ergebnissen aus der Polyedertheorie, der Dualitätstheorie und der polyedrischen Kombinatorik schöpfen. Diese Methoden können in unterschiedlichen Szenarien benutzt werden, um die Struktur des jeweiligen Problems besser zu verstehen.

In der vorliegenden Dissertation [Ta19] werden solche Methoden benutzt, um der Lösung zweier grundlegender Optimierungsprobleme näher zu kommen: der asymmetrischen Version des Handlungsreisenden-Problems sowie des Problems der perfekten Paarung (Perfect-Matching-Problem). Beides sind grundlegende Probleme, die Graphen betreffen – die vielleicht häufigsten und wichtigsten Strukturen in der Informatik. In vielerlei anderer Hinsicht dagegen scheinen beide Probleme sehr unterschiedlich zu sein: Während das asymmetrische Handlungsreisenden-Problem (ATSP) NP-schwer ist, liegt das perfekte Matching-Problem in P, und wir sind (obgleich in einem *parallelen* Szenario) an exakten Algorithmen interessiert und nicht an Approximationen. Es überrascht ein wenig, dass sich mit gleichartigen Methoden entscheidende strukturelle Einblicke in beide Probleme gewinnen lassen. Tatsächlich ist in beiden Fällen eine LP-Formulierung von exponentieller Größe mit *laminarer* Struktur der Ausgangspunkt der Lösung.

## 2 Unsere Beiträge

Im ersten Teil dieser Dissertation betrachten wir das asymmetrische Handlungsreisenden-Problem (ATSP) im Kontext von Approximationsalgorithmen und LP-Relaxationen. Im Speziellen geben wir den ersten Algorithmus für dieses Problem an, dessen Approximationsverhältnis beweisbar nicht durch eine unbeschränkte Funktion der Eingabegröße, sondern durch eine Konstante beschränkt ist. Es wurde lange vermutet, dass ein derartiger Algorithmus existiert; diese Vermutung können wir nun bestätigen. Da die Kosten der von unserem Algorithmus gelieferten Lösungen in Bezug auf die Standard-LP-Relaxation für das ATSP analysiert werden, bestätigt unser Ergebnis auch die vermutete konstante Integritätslücke dieser Relaxation.

Der erste Teil dieser Dissertation beruht auf einer Zusammenarbeit mit Ola Svensson und László A. Végh, die in STOC 2018 [STV18a] veröffentlicht wurde. Eine kurze Abhandlung dieses Teils wird in Abschnitt 3 gegeben.

Danach wenden wir uns dem Perfect-Matching-Problem zu, das im parallelen Szenario untersucht wird. Im Speziellen betrachten wir NC: die Komplexitätsklasse mit Problemen, deren Algorithmen parallel auf einer polynomialen Anzahl von Prozessoren und in polylogarithmischer Zeit ausgeführt werden können. Vom Perfect-Matching-Problem – zu bestimmen, ob sich alle Knoten eines gegebenen Graphen mit Kanten zu Paaren verbinden lassen – ist nicht bekannt, dass es in der NC-Komplexitätsklasse liegt. Es ist eine bedeutende und ungelöste Frage, einen solchen Algorithmus anzugeben. Nun stellt sich heraus, dass dies eine Frage der Derandomisierung ist. In Szenarien, bei denen Randomisierung erlaubt ist, sind nämlich entspreche Algorithmen schon seit 40 Jahren bekannt. Die Frage, ob alle effizienten Berechnungen deterministisch durchgeführt werden können, ist von grundlegender Bedeutung in der Informatik, und das parallele Berechnen von Paarungen ist eines von mehreren viel beachteten, konkreten Problemen, für die ein (einfacher) randomisierter Algorithmus bekannt ist, jedoch kein deterministischer.

Der zweite Teil dieser Dissertation beschreibt wesentliche Fortschritte auf dem Weg zu einer Lösung dieser Frage: Wir geben einen deterministischen Algorithmus für das Perfect-Matching-Problem an, der quasi-polynomial viele (im Gegensatz zu polynomial vielen) Prozessoren benutzt und in polylogarithmischer Zeit läuft. Dies zeigt, dass das Matching-Problem in der Komplexitätsklasse quasi-NC liegt. Der zweite Teil dieser Dissertation beruht auf einer Zusammenarbeit mit Ola Svensson, die in FOCS 2017 [ST17] veröffentlicht wurde.

## 3 Das asymmetrische Problem des Handlungsreisenden

Das Problem des Handlungsreisenden – den kürzesten Rundweg zu finden, der durch $n$ gegebene Städte führt – ist eines der bekanntesten NP-schweren Optimierungsprobleme.

Ohne irgendwelche Annahmen über die Distanzen zeigt eine einfache Reduzierung von dem Problem, zu entscheiden, ob ein Graph hamiltonsch ist, dass es NP-schwer ist, den kürzesten Rundweg bis auf einen gegebenen Gütefaktor zu approximieren. Daher wird das Problem üblicherweise dahingehend relaxiert, dass der Rundweg mehr als einmal durch eine jeweilige Stadt führen darf. Dies ist äquivalent zu der Annahme, dass die Distanzen die Dreiecksungleichung erfüllen: Die Distanz von Stadt $i$ nach Stadt $k$ ist nicht länger als die Distanz von $i$ nach $j$ plus die Distanz von $j$ nach $k$. Alle hier erwähnten Ergebnisse beziehen sich auf dieses Szenario.

Wird außerdem angenommen, dass die Distanzen symmetrisch sind, dann liefert der klassische Algorithmus von Christofides aus dem Jahr 1976 [Ch76] garantiert einen Rundweg mit einer Länge von höchstens $3/2$ der optimalen Länge. (An dieser Stelle sei daran erinnert, dass ein einfacher Approximationsalgorithmus der Güte 2 in Abschnitt 1 behandelt wurde.) Die Verbesserung dieser garantierten Approximationsgüte ist eine notorisch offene Frage bei Approximationsalgorithmen. Es gab einigen Wirbel um neuere Fortschritte für den Sonderfall, dass die Distanzen als ungewichtete Kürzeste-Pfad-Metriken gegeben sind [GSS11, MS16, Mu12, SV14]. Doch obgleich man mutmaßt, dass die Standard-LP-Relaxation das Optimum mit einem Gütefaktor von $4/3$ approximiert, so bleibt es doch eine schwer lösbare Aufgabe, den Algorithmus von Christofides zu verbessern.

Wenn wir uns nicht auf symmetrische Distanzen beschränken, erhalten wir das allgemeinere *asymmetrische* Handlungsreisenden-Problem (ATSP). Im Vergleich zum symmetrischen Szenario ist unserem Verständnis nach die Lücke hier viel größer, und die derzeitigen algorithmischen Methoden sind nicht in der Lage, eine konstante Approximationsgüte zu garantieren. Das ist insbesondere deswegen faszinierend, weil man davon ausgeht, dass die Standard-LP-Relaxation, auch als untere *Held-Karp-Schranke* bekannt, sich bis auf eine kleine Konstante an das Optimum annähert. Tatsächlich ist lediglich bekannt, dass ihre Integritätslücke[3] mindestens 2 beträgt [CGK06].

Der erste Approximationsalgorithmus für das ATSP wurde von Frieze, Galbiati und Maffioli [FGM82] vorgeschlagen. Er erreicht eine garantierte Approximationsgüte von $\log_2(n)$. Ihr eleganter Ansatz der „wiederholten Zyklus-Überdeckung“ wurde in mehreren Veröffentlichungen verfeinert [Bl08, Ka05, FS07], es gab aber keine *asymptotische* Verbesserung der garantierten Approximationsgüte. Dies änderte sich erst mit dem neueren Ergebnis von Asadpour et al. [As10], das eine Approximation der Güte $O(\log n\ /\log\log n)$ liefert. Asadpour et al. haben einen neuen und richtungsweisenden Ansatz zur Lösung des ATSP vorgestellt, der auf einer Verbindung mit dem graphentheoretischen Konzept dünner Spannbäume beruht. Dies hat im weiteren Verlauf zu verbesserten Algorithmen für Sonderfälle des ATSP geführt, wie etwa für Graphen mit beschränktem Genus [GS11]. Zudem haben Anari und Oveis Gharan unlängst diese Verbindung dazu benutzt, die beste bekannte obere Schranke für die Integritätslücke der Standard-LP-Relaxation signifikant auf $O(\mathrm{poly}\log\log n)$ zu verbessern [AG15]. Dies impliziert einen effizienten Algorithmus zum Schätzen des Optimalwerts eines Rundwegs innerhalb eines Gütefaktors von $O(\mathrm{poly}\log\log n)$, aber – da ihre Argumente nicht-konstruktiv sind – keinen Approximationsalgorithmus zum Finden eines Rundwegs mit entsprechender Gütegarantie.

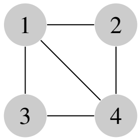
Ungefähr zur gleichen Zeit stellte Svensson [Sv15] einen alternativen Ansatz vor. Er reduziert die Aufgabe, das ATSP zu approximieren, auf ein anscheinend einfacheres Problem namens „Local-Connectivity ATSP“ (asymmetrisches TSP mit lokaler Konnektivität). Die Veröffentlichung [Sv15] gibt außerdem einen Algorithmus für Local-Connectivity ATSP an, der auf den Sonderfall knotengewichteter Metriken beschränkt ist, was einen Approximationsalgorithmus mit konstanter Güte für diesen Sonderfall impliziert. Svensson, Tarnawski und Végh haben dies in einer darauf aufbauenden Arbeit [STV18b] auf Graphen mit höchstens zwei verschiedenen Kantengewichten verallgemeinert. In diesem Teil der Dissertation knüpfen wir an diese beiden Ergebnisse an, verallgemeinern sie und geben einen Approximationsalgorithmus mit konstanter Güte für alle Metriken an.

**Theorem 1.** *Es gibt einen Algorithmus für das ATSP, der in Polynomialzeit einen Rundweg mit einem Wert von höchstens einem konstanten Vielfachen der unteren Held-Karp-Schranke liefert.*

## 4 Matching liegt in quasi-NC

Das Perfect-Matching-Problem ist eine grundlegende Frage der Graphentheorie. Die Arbeit an diesem Problem hat zu der Entwicklung vieler zentraler Konzepte der modernen Informatik beigetragen, darunter linear-algebraische, probabilistische und parallele Algorithmen. Edmonds [Ed65] war der Erste, der einen in Polynomialzeit laufenden Algorithmus dafür angegeben hat. Doch auch ein halbes Jahrhundert später verstehen wir die

[3] Die Integritätslücke ist definiert als das maximale Verhältnis zwischen den optimalen Werten der exakten (ganzzahligen) Formulierung und deren Relaxation.




$$T(G) = \begin{pmatrix} 0 & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ -X_{12} & 0 & 0 & X_{24} \\ -X_{13} & 0 & 0 & X_{34} \\ -X_{14} & -X_{24} & -X_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

Abb. 1: Beispiel für eine Tutte-Matrix eines ungerichteten Graphen.

deterministische parallele Komplexität des Perfect-Matching-Problems immer noch nicht vollständig. In dieser Dissertation erzielen wir Fortschritte in dieser Richtung. Wir betrachten ein Problem als parallel effizient lösbar, wenn es einen Algorithmus dafür gibt, der polylogarithmische Zeit benötigt und polynomial viele Prozessoren benutzt. Formeller gesprochen:

Ein Problem gehört der Komplexitätsklasse NC an, wenn es uniforme Kreise von polynomialer Größe und polylogarithmischer Tiefe aufweist. Die Komplexitätsklasse RNC ergibt sich, wenn wir außerdem Randomisierung zulassen.

Wir untersuchen die Entscheidungsversion und die Suchversion des Problems. Bei der Entscheidungsversion ist für einen gegebenen ungerichteten einfachen Graphen zu bestimmen, ob er eine perfekte Paarung aufweist. Bei der Suchversion wird eine perfekte Paarung gefunden und zurückgegeben, falls eine solche existiert. Dass die Entscheidungsversion in RNC liegt, hat zuerst Lovász [Lo79] gezeigt. Die Suchversion hat sich als schwieriger erwiesen, und erst mehrere Jahre später stellten Karp, Upfal und Wigderson [KUW86] sowie Mulmuley, Vazirani und Vazirani [MVV87] fest, dass sie in RNC liegt. Alle diese Algorithmen sind randomisiert, und es bleibt ein bedeutendes ungelöstes Problem, zu bestimmen, ob Zufälligkeit erforderlich ist, d. h., ob eine der Versionen in NC liegt.

Als erfolgreich erwiesen hat sich der linear-algebraische Ansatz zur Lösung des Perfect-Matching-Problems. Er nutzt die Tutte-Matrix, verknüpft mit einem Graphen $G = (V, E)$, wobei es sich um eine $|V| \times |V|$-Matrix handelt, die wie folgt definiert ist (für ein Beispiel siehe Abb. 1):

$$T(G)_{u,v} = \begin{cases} X_{(u,v)} & \text{if } (u,v) \in E \text{ and } u < v, \\ -X_{(v,u)} & \text{if } (u,v) \in E \text{ and } u > v, \\ 0 & \text{if } (u,v) \notin E, \end{cases}$$

wobei $X_{(u,v)}$ für $(u,v) \in E$ Variablen sind. Tuttes Theorem [Tu47] sagt aus, dass $\det T(G) \neq 0$ genau dann gilt, wenn $G$ eine perfekte Paarung aufweist. Das sind großartige Neuigkeiten für die Parallelisierung, da das Berechnen von Determinanten in NC ist [Cs76, Be84]. Die Matrix ist allerdings über einen Ring aus Unbestimmten definiert, so dass normalerweise Zufälligkeit benutzt wird, um zu testen, ob die Determinante von null verschieden ist. Ein Ansatz besteht darin, jede Unbestimmte durch einen zufälligen Wert aus einem großen Feld zu ersetzen. Dies führt, unter anderem, zu den schnellsten bekannten Einprozessor-Laufzeiten für dichte Graphen [MS04].

Ein zweiter, von Mulmuley, Vazirani und Vazirani [MVV87] für die Suchversion gewählter Ansatz, besteht darin, die Unbestimmten durch zufällig ausgewählte Zweierpotenzen zu ersetzen. Genauer wird für jede Kante $(u,v)$, ein zufälliges Gewicht $w(u,v) \in \{1,2,...,2|E|\}$ ausgewählt, und wir substituieren $X_{(u,v)} := 2^{w(u,v)}$. Nun treffen wir die entscheidende Annahme, dass eine perfekte Paarung (perfektes Matching) $M$ *isoliert* ist, in dem Sinne, dass sie die *einzige perfekte Paarung mit minimalem Gewicht* ist (also $w(M)$ minimiert wird). Dann bleibt $\det T(G)$ nach der Substitution von null verschieden: Es lässt sich zeigen, dass $M$ einen Term $\pm 2^{2w(M)}$ zu $\det T(G)$ beiträgt, wohingegen alle anderen Terme Vielfache von $2^{2w(M)+1}$ sind und daher $2^{2w(M)}$ nicht aufheben können. Die Determinante kann weiterhin in $\mathsf{NC}$ berechnet werden, da alle Einträge $2^{w(u,v)}$ der Matrix eine polynomiale Bitlänge aufweisen, und somit ein paralleler Algorithmus für die Entscheidungsversion vorliegt. Es folgt auch ein Algorithmus für die Suchversion: Für jede Kante wird parallel geprüft, ob die niederwertigste Stelle $2^{2w(M)}$ in der Determinante verschwindet, wenn die Kante entfernt wird; diejenigen Kanten, bei denen dies der Fall ist, werden ausgegeben.

Die grundlegende Behauptung in [MVV87] ist, dass sich durch Zuweisen von zufälligen Gewichten an Kanten in der Tat mit hoher Wahrscheinlichkeit eine Paarung isolieren lässt. Dies ist als das Isolations-Lemma bekannt, und es erweist sich in dem wesentlich allgemeineren Szenario von wahlfreien Mengenfamilien als zutreffend:

**Theorem 2** (Isolations-Lemma)**.** *Sei $\mathscr{M} \subseteq 2^E$ eine beliebige Familie von Untermengen eines Universums $E = \{1,2,...,|E|\}$ und eine Gewichtsfunktion $w : E \to \{1,2,...,2|E|\}$ dadurch definiert, dass zufällig jedes $w(e)$ für $e \in E$ unabhängig und uniform gewählt ist. Dann gibt es mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1/2$ eine* einzige *Menge $M \in \mathscr{M}$, welche das Gewicht $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$ minimiert.*

Eine solche Gewichtsfunktion $w$ nennen wir *isolierend*. Wir nehmen $\mathscr{M}$ in Theorem 2 als die Menge aller perfekten Paarungen.

Da Theorem 2 die einzige randomisierte Zutat zu dem $\mathsf{RNC}$-Algorithmus ist, besteht ein natürlicher Ansatz zu zeigen, dass das Perfect-Matching-Problem in $\mathsf{NC}$ liegt, darin, das Isolations-Lemma zu derandomisieren. Das heißt, wir hätten gerne eine Menge aus polynomial vielen Gewichtsfunktionen (mit polynomial beschränkten Werten), für die garantiert ist, dass sie eine isolierende Gewichtsfunktion enthält. Um einen $\mathsf{NC}$-Algorithmus zu erhalten, müssen wir diese Menge effizient parallel erzeugen können. Dann können wir alle Gewichtsfunktionen gleichzeitig ausprobieren.

Das Derandomisieren des Isolations-Lemmas erweist sich jedoch als eine anspruchsvolle offene Frage. Gelungen ist dies bisher für bestimmte Klassen von Graphen: stark chordale Graphen, planare bipartite Graphen sowie Graphen mit einer kleinen Anzahl von perfekten Paarungen. Allgemeiner gab es viel Interesse an $\mathsf{NC}$-Algorithmen für das Perfect-Matching-Problem auf eingeschränkten Graphen-Klassen (nicht notwendigerweise unter Verwendung des Isolations-Lemmas), z. B.: regulär bipartit, $P_4$-tidy, dicht, konvex bipartit, klauenfrei, Unvergleichbarkeitsgraphen. Das allgemeine Mengen-Familien-Szenario des Isolations-Lemmas steht auch in Beziehung mit unteren Schranken für die Kreiskomplexität und polynomialen Identitätstests. Für Referenzen siehe [ST17].

Kürzlich haben Fenner, Gurjar und Thierauf [FGT16] einen wesentlichen Beitrag geleistet. Ihnen ist es gelungen, das Isolations-Lemma für bipartite Graphen fast vollständig zu derandomisieren. Konkret definieren sie eine Familie von Gewichtsfunktionen, die sich „vergesslich“ berechnen lassen (lediglich unter Verwendung der Anzahl von Knoten $n$), und beweisen, dass für jeden bipartiten Graphen eine dieser Funktionen isolierend ist. Da die solchermaßen definierte Familie von quasi-polynomialer Größe ist und die Gewichte quasi-polynomial groß sind, hat dies das perfekte bipartite Matching-Problem in die Komplexitätsklasse $\mathsf{quasi\text{-}NC}$ versetzt.

Nichtsdestotrotz blieb das Szenario des Derandomisierungsproblems mit allgemeinen Graphen (sei es unter Verwendung des Isolations-Lemmas oder nicht) ungelöst. Selbst im planaren Fall, wo $\mathsf{NC}$-Algorithmen für bipartite planare Graphen und Graphen mit kleinem Genus seit Langem bekannt sind [MN89, MV00], kannte man bisher keinen $\mathsf{quasi\text{-}NC}$-Algorithmus für nicht-bipartite Graphen. Im Allgemeinen war die beste bekannte obere Schranke für die Größe uniformer Kreise mit polylogarithmischer Tiefe exponentiell.

Wir sind in der Lage, diese Verständnislücke nahezu zu überbrücken. Das Hauptergebnis des zweiten Teils der dieser Dissertation lautet:

**Theorem 3.** *Für jede Zahl $n$ ist es möglich, in $\mathsf{quasi\text{-}NC}$ $n^{O(\log^2 n)}$ Gewichtsfunktionen auf $\{1,2,\ldots,\binom{n}{2}\}$ mit durch $n^{O(\log^2 n)}$ beschränkten Gewichten derart zu konstruieren, dass für jeden Graphen auf $n$ Knoten eine der Gewichtsfunktionen eine perfekte Paarung isoliert (sofern eine solche existiert).*

Zusammengenommen implizieren die Ergebnisse aus [MVV87] und Theorem 3, dass das Perfect-Matching-Problem (sowohl die Entscheidungs- als auch die Suchvariante) bei allgemeinen Graphen in $\mathsf{quasi\text{-}NC}$ liegt. Wir merken an, dass der implizite Algorithmus sehr einfach ist. Die Komplexität liegt in der Analyse, d. h., im Beweis, dass eine der Gewichtsfunktionen isolierend ist.

## Literaturverzeichnis


[AG15] Anari, Nima; Gharan, Shayan Oveis: Effective-Resistance-Reducing Flows, Spectrally Thin Trees, and Asymmetric TSP. In: IEEE 56th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). S. 20–39, 2015.

[As10] Asadpour, Arash; Goemans, Michel X.; Madry, Aleksander; Gharan, Shayan Oveis; Saberi, Amin: An O(log n/ log log n)-approximation Algorithm for the Asymmetric Traveling Salesman Problem. In: Proceedings of the Twenty-First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2010. S. 379–389, 2010.

[Be84] Berkowitz, Stuart J.: On Computing the Determinant in Small Parallel Time Using a Small Number of Processors. Information Processing Letters, 18(3):147–150, 1984.

[Bl08] Bläser, Markus: A new approximation algorithm for the asymmetric TSP with triangle inequality. ACM Transactions on Algorithms, 4(4), 2008.

[CGK06] Charikar, Moses; Goemans, Michel X.; Karloff, Howard J.: On the Integrality Ratio for the Asymmetric Traveling Salesman Problem. Math. Oper. Res., 31(2):245–252, 2006.

[Ch76] Christofides, Nicos: Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem. Bericht, Graduate School of Industrial Administration, CMU, 1976.

[Cs76] Csanky, L.: Fast parallel inversion algorithm. SIAM Journal of Computing, 5:618–623, 1976.

[Ed65] Edmonds, Jack: Paths, trees, and flowers. Canadian Journal of Mathematics, 17:449–467, 1965.

[FGM82] Frieze, Alan M.; Galbiati, Giulia; Maffioli, Francesco: On the worst-case performance of some algorithms for the asymmetric traveling salesman problem. Networks, 12(1):23–39, 1982.

[FGT16] Fenner, Stephen A.; Gurjar, Rohit; Thierauf, Thomas: Bipartite perfect matching is in quasi-NC. In: Proceedings of the 48th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing, STOC. S. 754–763, 2016.

[FS07] Feige, Uriel; Singh, Mohit: Improved Approximation Ratios for Traveling Salesperson Tours and Paths in Directed Graphs. In: 10th International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization Problems APPROX 2007. S. 104–118, 2007.

[GS11] Gharan, Shayan Oveis; Saberi, Amin: The Asymmetric Traveling Salesman Problem on Graphs with Bounded Genus. In: Proceedings of the Twenty-Second Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2011. S. 967–975, 2011.

[GSS11] Gharan, Shayan Oveis; Saberi, Amin; Singh, Mohit: A Randomized Rounding Approach to the Traveling Salesman Problem. In: IEEE 52nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2011. S. 550–559, 2011.

[Ka05] Kaplan, Haim; Lewenstein, Moshe; Shafrir, Nira; Sviridenko, Maxim: Approximation algorithms for asymmetric TSP by decomposing directed regular multigraphs. J. ACM, 52(4):602–626, 2005.

[KUW86] Karp, Richard M.; Upfal, Eli; Wigderson, Avi: Constructing a perfect matching is in random NC. Combinatorica, 6(1):35–48, 1986.

[Lo79] Lovász, László: On determinants, matchings, and random algorithms. In: FCT. S. 565–574, 1979.

[MN89] Miller, G. L.; Naor, J.: Flow in planar graphs with multiple sources and sinks. In: 30th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. S. 112–117, 1989.

[MS04] Mucha, Marcin; Sankowski, Piotr: Maximum Matchings via Gaussian Elimination. In: 45th Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). S. 248–255, 2004.

[MS16] Mömke, Tobias; Svensson, Ola: Removing and Adding Edges for the Traveling Salesman Problem. J. ACM, 63(1):2:1–2:28, 2016.

[Mu12] Mucha, Marcin: 13/9-approximation for Graphic TSP. In: 29th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, STACS 2012. S. 30–41, 2012.

[MV00] Mahajan, Meena; Varadarajan, Kasturi R.: A New NC-algorithm for Finding a Perfect Matching in Bipartite Planar and Small Genus Graphs. In: Proceedings of the Thirty-second Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC. S. 351–357, 2000.

[MVV87] Mulmuley, Ketan; Vazirani, Umesh V.; Vazirani, Vijay V.: Matching is as easy as matrix inversion. Combinatorica, 7(1):105–113, 1987.

[ST17] Svensson, O.; Tarnawski, J.: The Matching Problem in General Graphs Is in Quasi-NC. In: 2017 IEEE 58th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). S. 696–707, 2017.

[STV18a] Svensson, Ola; Tarnawski, Jakub; Végh, László A.: A Constant-factor Approximation Algorithm for the Asymmetric Traveling Salesman Problem. In: Proceedings of the 50th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing. STOC 2018, New York, NY, USA, S. 204–213, 2018.

[STV18b] Svensson, Ola; Tarnawski, Jakub; Végh, László A.: Constant Factor Approximation for ATSP with Two Edge Weights. Mathematical Programming, 172(1-2):371–397, 2018.

[SV14] Sebő, András; Vygen, Jens: Shorter tours by nicer ears: 7/5-Approximation for the graph-TSP, 3/2 for the path version, and 4/3 for two-edge-connected subgraphs. Combinatorica, 34(5):597–629, 2014.

[Sv15] Svensson, Ola: Approximating ATSP by Relaxing Connectivity. In: FOCS 2015: Proceedings of the 56th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 2015.

[Ta19] Tarnawski, Jakub: New Graph Algorithms via Polyhedral Techniques. EPFL, Lausanne, 2019.

[Tu47] Tutte, W. T.: The Factorization of Linear Graphs. Journal of the London Mathematical Society, 22:107–111, 1947.

**Jakub Tarnawski** ist Algorithmenforscher bei Microsoft Research. Er interessiert sich umfassend für theoretische Informatik und kombinatorische Optimierung, insbesondere für Graphenalgorithmen und Approximationsalgorithmen. Bei seiner Arbeit widmet er sich grundlegenden Problemen auf diesen Gebieten, wie etwa dem Handlungsreisenden-Problem, der submodularen Maximierung, dem Matching, und verschiedenen Scheduling-Varianten. Er ist Träger des Best Paper Award des STOC 2018 für seine Arbeit zum Handlungsreisenden-Problem sowie des Best Paper Award des FOCS 2017 für seine Arbeit zu Paarungen. 2019 promovierte Jakub Tarnawski an der EPFL unter Anleitung von Ola Svensson zum Doktor der Informatik. Seine Dissertation wurde mit dem Chorafas Foundation Prize und der EPFL Thesis Distinction ausgezeichnet. Seine Master-Abschlüsse in Mathematik und Informatik erhielt er von der Universität Wrocław, Polen.